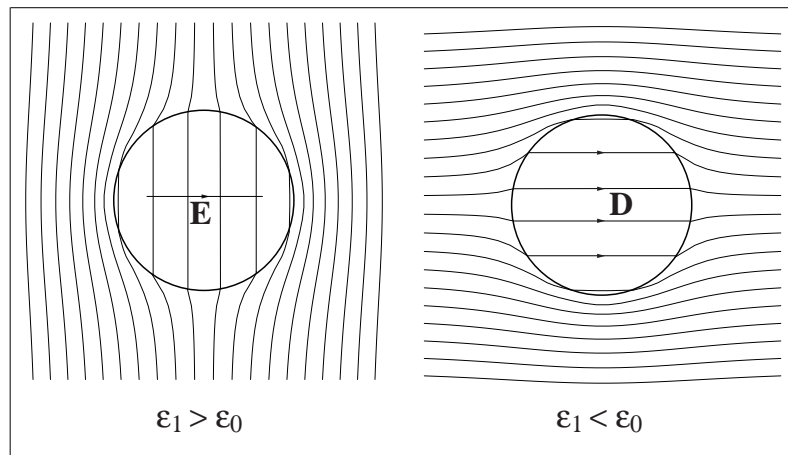


David Sénéchal

# ÉLECTRODYNAMIQUE ET RELATIVITÉ



NOTES DE COURS  
(PHQ-420)

Université de Sherbrooke  
Faculté des Sciences  
Avril 1996

# ÉLECTRODYNAMIQUE ET RELATIVITÉ

NOTES DE COURS  
(PHQ-420)

par

David Sénéchal  
Professeur  
Département de physique

Faculté des Sciences  
Université de Sherbrooke  
Avril 1996

# Table des Matières

<b>Préface</b>	3
<b>1. Électrostatique</b>	4
1.1. Lois de Coulomb et de Gauss	4
1. Charge électrique	4
2. Loi de Coulomb	5
3. Loi de Gauss	7
1.2. Potentiel électrique	8
1. Définition	8
2. Énergie potentielle d'une charge dans un champ	9
3. Énergie potentielle d'une distribution de charge	11
1.3. Électrostatique et conducteurs	12
1. Équation de continuité	12
2. Loi d'Ohm	13
3. Distribution des charges dans un conducteur	14
4. Capacité	15
1.4. Multipôles	16
1. Moment Dipolaire Électrique	17
2. Moment Quadripolaire Électrique	18
3. Théorème d'addition et forme générale	19
4. Énergie d'une distribution de charge dans un potentiel externe	20
1.5. Méthodes de solution de l'équation de Laplace	22
1. Propriétés des fonctions harmoniques	22
2. Séparation des variables (général)	23
3. Séparation des variables en coordonnées cartésiennes	23
4. Séparation des variables en coordonnées sphériques	25
5. Séparation des variables en coordonnées cylindriques	28
1.6. Diélectriques	29
1. Origine microscopique de la polarisation	29
2. Densité de polarisation	32
3. Induction électrique	33
4. Constante diélectrique	33
5. Conditions de continuité pour $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$	34
6. Énergie électrostatique et calcul des forces électriques	36
1.A. Notation indicielle	39
1.B. Polynômes de Legendre	40
Problèmes	43

<b>2. Magnétostatique</b>	49
2.1. Loi d'Ampère	49
1. Loi de Biot et Savart	49
2. Potentiel vecteur	51
3. Loi d'Ampère	51
2.2. Mouvement dans des champs électrique et magnétique	53
1. Force de Lorentz	53
2. Formulations Lagrangienne et Hamiltonienne	53
2.3. Dipôles magnétiques	54
1. Moment dipolaire	54
2. Moment magnétique et moment cinétique	56
3. Force et couple sur un moment dipolaire	58
4. Précession de Larmor	59
2.4. Magnétisme macroscopique	61
1. Aimantation	61
2. Diamagnétisme	62
3. Paramagnétisme	63
4. Ferromagnétisme	64
5. Conditions aux limites des champs <b>B</b> et <b>H</b>	65
6. Potentiel scalaire magnétique	66
Problèmes	68
<b>3. Électrodynamique</b>	70
3.1. Induction	70
1. Loi de Faraday	70
2. Inductance	71
3.2. Équations de Maxwell	72
1. Courant de Déplacement	72
2. Équations de Maxwell	73
3.3. Potentiels électromagnétiques	74
1. Transformations de jauge	74
2. Couplage minimal	75
3. Équation du mouvement pour les potentiels	76
3.4. Énergie du champ électromagnétique	77
3.5. Ondes Électromagnétiques	79
1. Équation d'Onde et Solution de d'Alembert	79
2. Ondes monochromatiques	80
3. Densité et flux d'énergie	81
4. Rayonnement dipolaire	82
5. Formule de Larmor	85
3.A. Théorème de Helmholtz	85
Problèmes	86

<b>4. Relativité Restreinte</b>	88
4.1. Transformations de Lorentz	88
1. Principe de la relativité restreinte	88
2. Transformations de Lorentz	89
3. Intervalle	90
4. Contraction des Longueurs et Dilatation du Temps	91
4.2. Formalisme covariant	91
1. Quadri-vecteurs et quadri-tenseurs	91
2. Tenseur métrique	94
3. Exemples	95
4.3. Formulation relativiste de l'électrodynamique	97
1. quadri-vecteur du potentiel électromagnétique	97
2. Tenseur électromagnétique	98
3. Invariants du champ	100
4.4. Applications	101
1. Champ d'une charge ponctuelle en mouvement uniforme	101
2. Rayonnement d'une charge accélérée	102
4.5. Formulation Lagrangienne	103
1. Principe de la moindre action	103
2. Action invariante d'une particule chargée dans un champ	104
3. Action du champ	105
4. Tenseur d'énergie-impulsion	106
Problèmes	109
<b>A. Facteurs de conversion SI-gaussien</b>	110
<b>B. Variables Électromagnétiques, SI vs gaussien</b>	111
<b>C. Formulaire</b>	112
<b>Bibliographie</b>	113
<b>Index</b>	114

---

# Préface

L'importance de l'électromagnétisme dans un programme de physique ne saurait être exagérée. Elle tient à la fois de l'énorme quantité d'applications de l'électromagnétisme dans les domaines techniques et la vie de tous les jours, et du rôle unificateur qu'a joué la théorie de l'électricité et du magnétisme dans notre compréhension de l'Univers.

Même si, d'un point de vue microscopique, l'interaction électromagnétique n'est que l'une des quatre interactions fondamentales de la matière, elle est de loin la plus active de ces interactions aux échelles de grandeurs qui vont de l'atome à l'être humain. La raison profonde de cette importance spéciale de l'interaction électromagnétique ne peut être comprise que dans la théorie quantique des interactions fondamentales et implique les notions de confinement et de brisure de symétrie, notions qui aident à comprendre pourquoi les interactions fortes et faibles sont si peu présentes à notre échelle. Quant à la gravitation, elle est si faible qu'elle nécessite des objets de grandes dimensions avant de se manifester vraiment.

Ce manuel est consacré à l'étude des lois fondamentales de l'électromagnétisme dans le cadre de la physique classique. Cette restriction nous limitera à l'étude de phénomènes macroscopiques, quoique nous nous risquerons à utiliser un modèle classique pour l'interaction des champs électromagnétiques avec la matière, dans le but de comprendre l'origine des phénomènes associés aux diélectriques et aux matériaux magnétiques. Les propriétés électromagnétiques de la matière (conductivité, polarisation, aimantation, etc.) sont cruciales pour comprendre la pléthore de phénomènes et applications de l'électromagnétisme, mais l'utilisation de la mécanique quantique est essentielle à leur compréhension détaillée. En fait, toutes les interactions de la matière, de l'échelle atomique à la notre – forces de cohésion, de van der Waals, de frottement, etc. – sont tirées de l'interaction électromagnétique. Il est hors de questions de les étudier toutes, car c'est là le rôle des cours de physique du solide, d'hydrodynamique, d'élasticité, sans compter toute la chimie!

Nous suivrons ici une approche semi historique, c'est-à-dire que nous ne partirons pas des lois fondamentales de l'électromagnétisme (les équations de Maxwell) pour ensuite en démontrer les conséquences. Nous partirons plutôt des lois de force découvertes expérimentalement et en ferons la synthèse plus tard, pour ensuite en déduire les conséquences dans la propagation et le rayonnement des ondes.

Ce manuel ne comporte que les sujets pertinents au cours *Électrodynamique et relativité* (PHQ-420), sur les fondements de l'électrodynamique et de la relativité restreinte. Une deuxième partie, non incluse dans ce tirage mais écrite en grande partie, porte sur les ondes électromagnétiques. Le niveau de connaissance des mathématiques requis est le suivant : connaissance de l'analyse vectorielle (opérateurs du gradient et théorèmes associés); équations différentielles linéaires; algèbre linéaire (diagonalisation d'une matrice, espace de fonctions). La technique de résolution des problèmes aux limites est expliquée dans ces notes, ainsi que quelques fonctions spéciales (par exemple, les polynômes de Legendre).

# Électrostatique

## 1.1 Lois de Coulomb et de Gauss

### 1.1.1 Charge électrique

La conclusion principale des études qualitatives effectuées sur l'électricité aux 17<sup>e</sup> et 18<sup>e</sup> siècles est l'existence d'une propriété des corps appelée *charge électrique*. Cette charge, qu'on imaginait alors comme un fluide subtil, pouvait passer d'un corps à un autre par frottement ou par simple contact. Dans son état normal, un corps ne possède aucune charge électrique – il est qualifié de *neutre* – tandis qu'un corps en possédant un excédent est dit *chargé positivement* (ou *négativement*, s'il comporte un déficit de charge).

On sait, depuis les travaux de Milikan, que la charge électrique est quantifiée. Dans la compréhension actuelle des choses, chaque particule élémentaire possède une charge électrique bien définie, qui caractérise son interaction électromagnétique. La charge d'un objet – macroscopique ou non – est simplement la somme algébrique des charges associées à chacune des particules qui le composent. La quantification de la charge électrique est expliquée dans le cadre des théories unifiées des interaction fondamentales, de façon semblable à la quantification du spin en mécanique quantique.<sup>1</sup>

Tableau 1.1 Charges électriques de quelques particules importantes

nom	charge ( $\times e$ )	composition
électron	-1	-
neutrino	0	-
quark u	$\frac{2}{3}$	-
quark d	$-\frac{1}{3}$	-
photon	0	-
proton	1	uud
neutron	0	udd

En dépit de la quantification de la charge, on peut en pratique la considérer comme une quantité continue dans les corps macroscopiques, en raison du très grand nombre d'électrons qui peuvent passer d'un objet à un autre lors d'un contact.

<sup>1</sup> Signalons cependant que le détail de ces théories n'a pas jusqu'ici fait l'objet de confirmation expérimentale.

La charge électrique est une quantité strictement conservée lors des interactions fondamentales : les particules chargées peuvent changer de nature, mais la charge totale n'est pas modifiée. La conservation de la charge constitue l'une des symétries de base sur lesquelles se fonde notre compréhension de l'Univers.

### 1.1.2 Loi de Coulomb

La première mesure quantitative concernant l'interaction électrique de deux corps chargés électriquement fut faite par Coulomb à l'aide d'une balance à torsion. Il trouva, en langage moderne, que la force exercée entre deux particules chargées est

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad (1.1)$$

Explications :

$\mathbf{F}_{12}$  est la force exercée par la charge  $q_2$  au point  $\mathbf{r}_2$  sur  $q_1$  au point  $\mathbf{r}_1$ .

$r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  est la distance entre les deux charges.

$q_1, q_2$  sont les charges électriques.

$\hat{\mathbf{r}}_{12} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/r_{12}$  est le vecteur unité allant de  $q_2$  vers  $q_1$

#### Remarques

1. La force est centrale.
2. Elle est proportionnelle au produit des deux charges. Deux charges de même signe se repoussent, de signes opposés s'attirent.
3. La force varie en raison inverse du carré de la distance (comme la force de gravité). Expérimentalement,  $F \propto r^{-(2+e)}$  où  $e < 5.8 \times 10^{-16}$ . Dans la théorie quantique, ceci signifie que la masse du photon est nulle, c.-à-d.  $\mu_\gamma < 4 \times 10^{-48} g \sim 10^{-15} \mu_e$ .
4. La force de Coulomb telle qu'écrite en (1.1) définit un système d'unités pour la charge électrique, à savoir le système gaussien. Ce système est différent du système international (SI) mais est beaucoup plus adapté à la théorie électromagnétique. L'unité de charge est le *statcoulomb*. Par définition, deux charges de 1 statcoulomb chacune subissent une force électrique de 1 dyn si elles sont distantes de 1 cm.<sup>2</sup>

La loi de Coulomb telle qu'écrite ci-haut est incomplète. On doit lui ajouter le *principe de superposition*, qui stipule que la force nette exercée sur une charge par un ensemble de charges est la somme vectorielle des forces de Coulomb exercées par chacune des charges :

$$\mathbf{F}_{\text{tot.}} = q_1 \sum_{i=2}^N \frac{q_i}{r_{1i}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1i} \quad (1.2)$$

<sup>2</sup> Les unités de base du système gaussien sont le centimètre, le gramme et la seconde, d'où l'acronyme *cgs*. Le *dyne* est l'unité de la force (1 g.cm/s<sup>2</sup>) et l'*erg* l'unité d'énergie (1 g.cm<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>).



### Champ électrique

Le *champ électrique*  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  est la force par unité de charge exercée au point  $\mathbf{r}$  par une distribution quelconque de charge sur une charge test que l'on prend infiniment petite, pour ne pas perturber la distribution :

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (1.3)$$

Bien sûr, il s'agit ici d'une définition *opérationnelle* du champ électrique, à partir d'une mesure de la force sur une charge test infinitésimale. Il ne peut s'agir d'une définition fondamentale puisque la limite  $q \rightarrow 0$  est en pratique impossible, la charge étant quantifiée. Il est préférable de considérer le champ électrique comme une quantité fondamentale créée par des *sources* et dont l'influence sur un charge ponctuelle  $q$  se traduit par une force électrique :

$$\boxed{\mathbf{F} = q\mathbf{E}} \quad (1.4)$$

Il est bien entendu que le champ électrique ressenti par une charge ponctuelle est causé par toutes les charges de l'espace, à l'exception de cette charge elle-même. D'après (1.2), le champ créé par un ensemble de charges ponctuelles est

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (1.5)$$

Le champ électrique est donc un concept qui sert d'intermédiaire dans l'influence mutuelle des charges électriques : on considère en premier lieu comment des charges peuvent créer un champ électrique en tout point pour ensuite considérer l'influence de ce champ sur une charge donnée.

### Distribution de charge

On considère souvent des distributions continues de charge qu'on note  $\rho(\mathbf{r})$ . La charge contenue dans un élément de volume  $d^3r$  est alors égale à  $dq = \rho(\mathbf{r})d^3r$ . La densité  $\rho$  correspondant à une charge ponctuelle  $q$  située au point  $\mathbf{r}_0$  s'écrit alors  $\rho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  où  $\delta(\dots)$  est la fonction de Dirac. Notons qu'en coordonnées cartésiennes, cette notation signifie

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \quad (1.6)$$

Si on désire, dans le contexte de la physique classique, que la densité  $\rho$  soit une quantité continue, il faut évidemment se limiter à des échelles de distance suffisamment grandes pour que les fluctuations de la charge dans un élément de volume mésoscopique soient négligeables. Par mésoscopique, on entend une échelle de grandeur petite en comparaison des grandeurs macroscopiques, mais grande par rapport aux échelles atomiques. La fonction delta n'est évidemment pas continue, mais son utilisation permet d'appliquer le concept de densité de charge à des charges ponctuelles. L'utilisation d'une densité de charge  $\rho$  est donc parfaitement générale. Dans un contexte quantique, la densité de charge associée à un électron est  $e|\psi|^2$ , où  $\psi$  est la fonction d'onde associée : le concept de densité de charge est alors incontournable.

En vertu du principe de superposition, le champ créé par une distribution statique arbitraire  $\rho$  est

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.7)$$

### 1.1.3 Loi de Gauss

On définit le *flux électrique* passant au travers d'une surface orientée  $S$  comme l'intégrale de  $\mathbf{E}$  à travers cette surface :

$$\Phi_E[S] = \int_S \mathbf{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \quad (1.8)$$

Les crochets  $[ ]$  indiquent que  $\Phi_E$  est une fonctionnelle de la surface  $S$ . Si la surface est fermée, le signe d'intégrale comporte un cercle :  $\oint$ . La *loi de Gauss* stipule que le flux électrique sortant d'une surface fermée est égal à la charge totale incluse à l'intérieur de la surface :

$$\oint_S \mathbf{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = 4\pi q_{\text{tot.}} \quad (1.9)$$

Démontrons cette loi en trois étapes, à partir de la loi de Coulomb.

1. Pour une charge ponctuelle  $q$  à l'origine avec pour  $S$  une sphère de rayon  $r$  centrée sur  $q$ , on a  $\mathbf{E} = q\hat{\mathbf{r}}/r^2$  et  $\mathbf{d}\mathbf{a} = r^2\hat{\mathbf{r}}d\Omega$ . Donc

$$\oint_S \mathbf{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = q \int d\Omega = 4\pi q \quad (1.10)$$

La loi de Gauss est donc valide pour une sphère de rayon arbitraire.

2. Pour une surface  $S$  quelconque enveloppant une charge ponctuelle, on utilise le théorème de la divergence :

$$\oint_S \mathbf{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (1.11)$$

où  $V$  est le volume qu'entoure la surface fermée  $S$ . En coordonnées sphériques la divergence d'un champ vectoriel  $\mathbf{E}$  est

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1.12)$$

ce qui implique, pour le champ produit par une charge ponctuelle centrée à l'origine, que  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  sauf à la position même de la charge. Donc la forme précise de  $S$  n'a pas d'importance car seule l'origine contribue à l'intégrale. On en conclut que la loi de Gauss est valable pour une surface quelconque, dans le cas d'une charge ponctuelle.

3. Dans le cas d'un ensemble de charges ponctuelles (ou d'une distribution continue) la loi de Gauss est valide en vertu du principe de superposition.

Dans le cas d'une distribution continue de charge, la loi de Gauss s'écrit comme suit (on a utilisé le théorème de la divergence):

$$4\pi \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) = \oint_S \mathbf{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (1.13)$$

Comme la surface  $S$  est arbitraire, ceci peut s'écrire

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho} \quad (1.14)$$

Dans ce qui précède, nous sommes partis de la loi de Coulomb et du principe de superposition pour arriver à la loi de Gauss (1.14). Nous aurions pu faire l'inverse, c'est-à-dire adopter comme point de départ

la loi de Gauss et démontrer la loi de Coulomb. En fait, la solution générale de l'équation différentielle (1.14) est donnée par l'Éq. (1.7). Il faut cependant noter qu'à toute solution de (1.14) on peut ajouter le rotationnel d'un champ vectoriel quelconque  $\mathbf{A}$ , puisque que  $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0$ . Qu'une telle addition soit en réalité impossible ici provient d'une propriété additionnelle du champ électrique en électrostatique : le champ de force  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  associé au champ électrique est conservatif, c'est-à-dire que  $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$ . Ces idées seront précisées dans l'annexe 3.A.

## 1.2 Potentiel électrique

### 1.2.1 Définition

Le champ électrique d'une charge ponctuelle située à l'origine peut s'exprimer comme suit :<sup>3</sup>

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad \text{où} \quad \Phi = \frac{q}{r} \quad (1.15)$$

la fonction  $\Phi$  est le *potentiel électrique* associé au champ  $\mathbf{E}$ . En général, le potentiel électrique associé à un ensemble de charges ponctuelles  $q_i$  de positions  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) est, en vertu du principe de superposition,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (1.16)$$

On vérifie directement que l'expression (1.5) pour le champ électrique correspondant est obtenue en calculant le gradient :  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ .

Dans le cas d'une distribution continue de charge caractérisée par une densité volumique  $\rho(\mathbf{r})$ , le potentiel est donné par la limite continue de (1.16):

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.17)$$

L'avantage de cette relation et de (1.16), en comparaison des expressions correspondantes pour le champ électrique, est que leur calcul est beaucoup plus simple : le potentiel est un scalaire, alors que le champ est un vecteur.

La loi de Gauss appliquée à  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  mène à l'équation de Poisson :

$$\boxed{\nabla^2\Phi = -4\pi\rho} \quad (1.18)$$

La solution de cette équation nous est connue en principe : c'est l'Éq. (1.17). Cependant, la solution (1.17) n'est utile en pratique que si on connaît précisément la densité de charge  $\rho$ , ce qui n'est pas souvent le cas. Il découle de notre solution de l'équation de Poisson l'identité suivante, pour le potentiel créé par une charge unité située à  $\mathbf{r}'$ :

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.19)$$

Le potentiel n'est pas une fonction unique a priori, puisqu'on peut y ajouter une constante sans changer le champ électrique. Par convention on fixe à zéro le potentiel à l'infini (si possible), pour lever cette ambiguïté.

---

<sup>3</sup> L'expression de l'opérateur gradient  $\nabla$  en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques est donnée en annexe de ce manuel.

### 1.2.2 Énergie potentielle d'une charge dans un champ

Rappelons que le *travail* exercé par un champ de force  $\mathbf{F}$  sur une particule de déplaçant le long d'une courbe  $C$  est par définition

$$W = \int_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F} \quad (1.20)$$

Ce travail est égal au gain en énergie cinétique de la particule réalisé pendant son trajet sur la courbe, en vertu de l'équation du mouvement  $\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$ :

$$\begin{aligned} W &= m \int_C d\mathbf{l} \cdot \dot{\mathbf{v}} \\ &= m \int_C dt \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \\ &= m \int_C dt \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \Big|_{\text{final}} - \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \Big|_{\text{initial}} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Dans le cas de la force électrique, ce travail est l'intégrale d'un gradient, par conséquent égal à la différence des valeurs du potentiel aux points initial et final de la trajectoire  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{r}_f$ :

$$W = q \int_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = -q(\Phi(\mathbf{r}_f) - \Phi(\mathbf{r}_i)) \quad (1.22)$$

On en conclut que l'énergie totale

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + q\Phi \quad (1.23)$$

est conservée et que l'énergie potentielle d'une charge dans un potentiel électrostatique causé par d'autres charges est

$$U = q\Phi(\mathbf{r}) \quad (1.24)$$

Le fait que la force électrique soit 'conservative' est évidemment lié au fait qu'elle est irrotationnelle. On a en effet l'équation

$$\boxed{\nabla \wedge \mathbf{E} = 0} \quad (\text{Électrostatique}) \quad (1.25)$$

qui provient directement du fait que le rotationnel d'un gradient est nul ( $\nabla \wedge \nabla = 0$ ). Cela signifie que le travail de la force électrique sur une charge qui se déplace d'un point  $\mathbf{r}_i$  à un point  $\mathbf{r}_f$  ne dépend pas du chemin emprunté pour aller de  $\mathbf{r}_i$  à  $\mathbf{r}_f$ , mais seulement de la différence de potentiel entre ces deux points.

#### Exemple 1.1: Loi de Child-Langmuir

Considérons deux plaques parallèles, grandes par rapport à leur séparation  $a$  et situées respectivement à  $x = 0$  et  $x = a$ . Des électrons sont libérés par la plaque de gauche (cathode) sous l'effet de la chaleur et sont accélérés jusqu'à la plaque de droite (anode) par une différence de potentiel  $V$ . On prend  $\Phi(0) = 0$  et  $\Phi(a) = V$  (l'électron a une charge négative  $-e$ ). Le problème est de trouver le potentiel  $\Phi$  en fonction de  $x$ , ainsi que la densité de charge  $\rho$ .

*Solution :* Si  $v$  est la vitesse des électrons, la conservation de l'énergie impose

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\Phi(x) \quad (1.26)$$

La densité de courant est négative ( $= -J$ ), puisque les électrons se dirigent vers la droite et la charge vers la gauche. Si  $\rho$  est la densité de charge, on a  $J = -\rho v$ . Cette densité de courant ne dépend pas de  $x$ , sinon il y aurait accumulation continue de charge entre les deux plaques. Puisque la vitesse doit augmenter avec  $x$ , on s'attend à ce que la densité de charge diminue (en valeur absolue) quand  $x$  augmente. Le potentiel peut être déterminé par l'équation de Poisson :

$$\Phi'' = -4\pi\rho = \frac{4\pi J}{v} = 4\pi J \sqrt{\frac{m}{2e\Phi}} \quad (1.27)$$

En multipliant par  $\Phi'$ , on obtient

$$\Phi'\Phi'' = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\Phi')^2 = \sqrt{\frac{m}{2e}} 8\pi J \frac{d}{dx} \sqrt{\Phi} \quad (1.28)$$

En intégrant, on obtient

$$(\Phi')^2 = 16\pi J \sqrt{\frac{m}{2e}} \sqrt{\Phi} \quad (1.29)$$

La constante d'intégration est nulle : en effet, cette constante égale à  $E_0^2$ , où  $E_0$  est le champ électrique à  $x = 0$ . Si  $E_0 > 0$ , les électrons subissent une force qui les repousse vers la plaque, ce qui empêche tout courant. Si, au contraire,  $E_0 < 0$ , les électrons quittent trop rapidement la plaque, et le nuage électronique crée un champ compensatoire qui ramène  $E_0$  à zéro dans un régime permanent. On a donc

$$\frac{\Phi'}{\Phi^{1/4}} = 4\sqrt{\pi J} (m/2e)^{1/4} \quad (1.30)$$

dont l'intégration donne

$$\frac{4}{3} \Phi^{3/4} = 4\sqrt{\pi J} (m/2e)^{1/4} x \quad (1.31)$$

ou encore

$$\Phi(x) = \left[ 9\pi J \sqrt{m/2e} \right]^{2/3} x^{4/3} \quad (1.32)$$

Par conséquent, le champ électrique et la densité de charge ont les comportements suivants :

$$|\mathbf{E}| \propto x^{1/3} \quad \rho \propto x^{-2/3} \quad (1.33)$$

Cette variation en fonction de la distance de la plaque constitue la loi de Child-Langmuir.

---

### 1.2.3 Énergie potentielle d'une distribution de charge

L'énergie potentielle résultant de la présence de deux charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$  situées à  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  est alors

$$U = \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (1.34)$$

Il s'agit de l'énergie nécessaire à la mise en place de la configuration, en approchant les charges une à une de l'infini. L'énergie potentielle résultant d'une configuration de charges ponctuelles  $\{q_i\}$  situées aux positions  $\{\mathbf{r}_i\}$  est

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (1.35)$$

Le facteur de  $\frac{1}{2}$  compense pour le fait que chaque paire est comptés deux fois dans la somme. Si  $\Phi^{(i)}(\mathbf{r})$  est le potentiel créé par toutes les charges sauf la  $i^e$ , alors l'énergie potentielle de la configuration peut s'écrire

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi^{(i)}(\mathbf{r}_i) \quad (1.36)$$

Prenons maintenant la limite continue de cette expression. On suppose que tout élément de volume  $d^3r$ , aussi petit soit il, contient une charge  $\rho(\mathbf{r})d^3r$  et que la charge est divisible à volonté. L'expression (1.36) pour l'énergie potentielle de la configuration devient

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \Phi \nabla^2 \Phi \quad (1.37)$$

où nous avons utilisé l'équation de Poisson. La différence subtile entre cette expression et l'Éq. (1.36) est qu'un élément de charge  $\rho(\mathbf{r})d^3r$ , dans la limite où l'élément de volume tend vers zéro, est trop petit pour contribuer appréciablement au potentiel  $\Phi(\mathbf{r})$  à ce point précis et donc on néglige la différence entre  $\Phi^{(i)}(\mathbf{r}_i)$  et  $\Phi(\mathbf{r}_i)$ . Par conséquent, si on applique l'expression (1.37) à une distribution de charges ponctuelles, on trouve plus que l'énergie nécessaire à mettre en place les charges ponctuelles : on trouve aussi l'énergie nécessaire à construire chacune des charges ponctuelles à partir d'un 'fluide' électrique infiniment divisible.

Intégrons par parties l'expression (1.37), en utilisant la décomposition

$$\Phi \nabla^2 \Phi = \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) - \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \quad (1.38)$$

Comme  $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ , on obtient

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \mathbf{E}^2 + \frac{1}{8\pi} \oint_{\infty} \mathbf{da} \cdot \mathbf{E} \Phi \quad (1.39)$$

où la seconde intégrale a été convertie en intégrale de surface par le théorème de la divergence. L'indice  $\infty$  signifie que cette intégrale est calculée sur une surface (une sphère, par exemple) située à l'infini, c'est-à-dire entourant tout l'espace. Cette intégrale s'annule pour une distribution de charge concentrée dans une région finie de l'espace. En effet, du point de vue d'une sphère quasi-infinie de rayon  $R$  au centre de laquelle se situe une distribution de charge d'étendue minime en comparaison de  $R$ , le champ électrique et le potentiel se comportent respectivement comme  $Q/R^2$  et  $Q/R$ ,  $Q$  étant la charge totale de la distribution. Comme l'aire de la sphère est proportionnelle à  $R^2$ , l'intégrale de surface se comporte au total comme  $\sim 1/R$  et tend vers zéro quand  $R \rightarrow \infty$ . Il nous reste donc que le premier terme de (1.39). Il est alors légitime d'identifier  $\mathbf{E}^2/8\pi$  à une *densité d'énergie électrique*  $\mathcal{E}$ :

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2} \quad (1.40)$$

**Exemple 1.2:** Rayon classique de l'électron

Supposons que l'électron est une sphère de rayon  $r_c$  sur la surface de laquelle sa charge  $e$  est distribuée uniformément. En supposant que l'énergie au repos  $mc^2$  de l'électron provienne entièrement de l'énergie nécessaire à assembler cette charge, trouver le rayon  $r_c$ .

*Solution :* La densité d'énergie électrique autour de l'électron est

$$\frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 = \begin{cases} \frac{1}{8\pi} \frac{e^2}{r^4} & (r > r_c) \\ 0 & (r < r_c) \end{cases} \quad (1.41)$$

L'intégrale de cette densité est l'énergie électrostatique totale de l'électron, qu'on suppose égale à son énergie au repos :

$$mc^2 = \frac{1}{8\pi} \int_{r_c}^{\infty} \frac{e^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} e^2 / r_c \quad (1.42)$$

Ce qui mène au rayon  $r_c = \frac{1}{2} r_0$  où on a défini le *rayon classique de l'électron*:

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2,82 \times 10^{-13} \text{ cm} \quad (1.43)$$

Ce rayon n'est malheureusement pas le rayon réel de l'électron : les expériences de la physique des particules n'ont pas réussi à détecter une structure interne pour l'électron jusqu'à des distances de l'ordre de  $10^{-16}$  cm. Le rayon classique de l'électron est plutôt une grandeur caractéristique associée à l'interaction des électrons avec la lumière, comme nous le verrons plus tard.

## 1.3 Électrostatique et conducteurs

### 1.3.1 Équation de continuité

Dans le but de préciser les conditions d'application de l'électrostatique, il est souhaitable de définir maintenant les principales quantités qui caractérisent le mouvement de la charge électrique. On définit la *densité de courant*  $\mathbf{J}$  comme la quantité de charge électrique qui s'écoule par unité de surface et par unité de temps. Autrement dit, étant donné un élément de surface infinitésimal  $d\mathbf{a}$ , la quantité de charge électrique qui traverse cet élément par unité de temps est  $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ . Le *courant électrique* traversant une surface  $S$  est le flux de la densité de courant à travers cette surface, c'est-à-dire la quantité de charge traversant la surface  $S$  par unité de temps :

$$I[S] = \int_S d\mathbf{a} \cdot \mathbf{J} \quad (1.44)$$

Si la surface  $S$  est fermée, le courant qui en sort est relié à la dérivée de la charge totale incluse dans  $S$ , en vertu de la conservation de la charge électrique :

$$\oint_S d\mathbf{a} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \quad (1.45)$$

D'une autre côté, on peut appliquer le théorème de la divergence au membre de gauche :

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \quad (1.46)$$

Ceci étant vrai pour toute surface  $S$ , les intégrands doivent être égaux et on en déduit l'équation de continuité:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (1.47)$$

En général, cette équation relie la densité d'une quantité conservée à la densité de courant associée.

Si on considère le fluide électrique comme possédant une vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  à chaque endroit, alors la densité de courant est le produit de cette vitesse par la densité de charge :

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (1.48)$$

Ceci se démontre assez simplement, en considérant un élément de surface  $d\mathbf{a} = \delta A \mathbf{n}$ . Le fluide qui traverse cet élément de surface en un temps  $\delta t$  occupe un volume  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta A \delta t$  et possède donc une charge électrique  $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta A \delta t$ . D'un autre côté, cette charge électrique doit être  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \delta A \delta t$ , par définition de la densité de courant. On retrouve donc la relation  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ .

Dans le cas particulier d'un ensemble de  $N$  particules de charges  $q_i$ , se déplaçant à des vitesses  $\mathbf{v}_i$  et se trouvant à des positions  $\mathbf{r}_i$ , la densité de courant est donnée par<sup>4</sup>

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (1.49)$$

### 1.3.2 Loi d'Ohm

Un conducteur se définit comme un matériau qui contient des charges mobiles qui se meuvent presque librement sous l'action d'un champ électrique. On définit la *conductivité*  $\sigma$  d'un conducteur par la relation linéaire qui y existe entre la densité de courant et le champ dans plusieurs matériaux (*Loi d'Ohm*):

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}} \quad (1.50)$$

Du point de vue microscopique, la loi d'Ohm est le résultat de la diffusion des électrons d'un cristal par ce qui altère la structure périodique du cristal, en particulier les ondes sonores (phonons), les défauts et les impuretés. Bien sûr, cette relation linéaire n'est qu'une approximation, valable lorsque le champ est suffisamment faible. Plus le champ  $\mathbf{E}$  augmente en intensité, plus les corrections non linéaires à la loi d'Ohm sont importantes. Nous les négligerons cependant dans ce qui suit.

Si on substitue dans l'équation de continuité la loi d'Ohm et la loi de Gauss, on trouve

$$(4\pi\sigma)\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.51)$$

<sup>4</sup> Notez que les unités de la densité de courant sont  $[\mathbf{J}] = Q/TL^2$ , ce qui veut dire charge par unité de temps par unité de surface. Ceci est compatible avec les expressions  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$  et (4.50), car les unités de la fonction delta  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$  sont  $L^{-3}$ . En effet, la fonction delta est caractérisée par la relation  $\int d^3r \delta(\mathbf{r}) = 1$ ; puisque la mesure d'intégration  $d^3r$  a les unités  $L^3$ , la fonction delta doit compenser pour que le résultat soit sans unités.



Ce qui résulte en un amortissement exponentiel de la densité de charge avec temps de relaxation  $\tau$ :

$$\rho(t) \sim e^{-t/\tau} \quad \tau = \frac{1}{4\pi\sigma} \quad (1.52)$$

Voici quelques valeurs typiques :<sup>5</sup>

1. cuivre :  $\tau \sim 1.5 \times 10^{-19} s$ .
2. eau pure :  $\tau \sim 3.5 \times 10^{-6} s$ .
3. quartz :  $\tau \sim 2 \times 10^6 s$ .

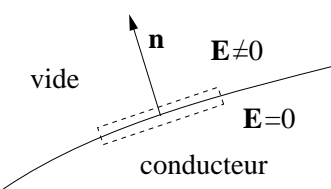
On se considère en situation électrostatique quand les échelles de temps du problème sont beaucoup plus grandes que  $\tau$  (dans un bon conducteur) ou beaucoup plus petites que  $\tau$  (dans un bon isolant).

### 1.3.3 Distribution des charges dans un conducteur

Dans une situation électrostatique, c'est-à-dire qui ne change pas avec le temps, le champ électrique est nul dans un conducteur et la charge qu'on y dépose se distribue à la surface du conducteur et non à l'intérieur. En effet,

1. Si le champ  $\mathbf{E}$  était non nul dans le conducteur, il en résulterait un courant de charge en vertu de la loi d'Ohm et une redistribution des charges jusqu'à ce que le champ soit nul, dans un temps de l'ordre de  $\tau$ .
2. Si la densité de charge était non nulle à l'intérieur du conducteur, alors la loi de Gauss donnerait un flux électrique non-nul autour d'une sphère suffisamment petite autour d'un point intérieur, ce qui n'est pas le cas puisque  $\mathbf{E} = 0$  à l'intérieur. Donc la charge qui peut y exister se situe uniquement sur la surface du conducteur, où cet argument est inapplicable.

Comme le champ électrique est nul dans un conducteur, le potentiel  $\Phi$  y est constant. La surface du conducteur est alors une équipotentielle et donc le champ électrique à la surface est nécessairement perpendiculaire à cette dernière. Tout près de la surface d'un conducteur, la loi de Gauss nous donne la relation entre la densité superficielle de charge  $\rho_s$  et le champ électrique :

$$\mathbf{E} \approx 4\pi\rho_s\mathbf{n} \quad (1.53)$$


Cette expression se démontre en appliquant la loi de Gauss sur une surface fermée infiniment mince qui chevauche la surface du conducteur, comme illustré.

La densité volumique d'énergie associée à la surface d'un conducteur est

$$\frac{1}{8\pi}\mathbf{E}^2 = 2\pi\rho_s^2 \quad (1.54)$$

Cette quantité est aussi égale à la pression exercée par le conducteur sur sa surface : l'énergie gagnée par une expansion de la surface du conducteur (déplacement virtuel) sur une distance  $\delta x$

<sup>5</sup> En pratique, la conductivité dépend de la fréquence du champ électrique appliqué. On donne ici les valeurs de  $\sigma$  à fréquence nulle. La loi d'Ohm (1.50) doit être comprise comme reliant les transformées de Fourier en fréquence :  $\mathbf{J}(\omega) = \sigma(\omega)\mathbf{E}(\omega)$ .

pour un élément de surface  $\delta A$  est égale à  $2\pi\rho_s^2\delta x\delta A$ , ce qui mène à la pression citée. C'est aussi la force exercée sur l'élément de surface par tous les autres éléments de surface du conducteur : le champ  $\mathbf{E}$  peut être décomposé en deux parties  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$ , dues respectivement à l'élément de surface à  $\mathbf{r}$  et à la somme de toutes les autres sources. Tout juste à l'intérieur (resp. à l'extérieur) du conducteur, on a  $\mathbf{E}_1 = -2\pi\mathbf{n}\rho_s$  (resp.  $+2\pi\mathbf{n}\rho_s$ ), en vertu du théorème de Gauss. Donc  $\mathbf{E}_2 = 2\pi\mathbf{n}\rho_s$  tout juste à l'intérieur, puisque  $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0$  à cet endroit. Or la force par unité de surface exercée sur l'élément est  $\rho_s\mathbf{E}_2$ .

### 1.3.4 Capacité

En vertu du principe de superposition, le potentiel d'un conducteur est proportionnel aux charges qui sont placées dans le système. Soit  $Q_i$  les charges placées dans un système de  $N$  conducteurs ( $i = 1, \dots, N$ ) et  $\Phi_i$  le potentiel qui en résulte sur le conducteur  $i$ . On a la relation linéaire

$$\Phi_i = \sum_j B_{ij}Q_j \quad (1.55)$$

où les coefficients  $B_{ij}$  forment une matrice carrée qui ne dépend que de la configuration spatiale des conducteurs en question. On préfère généralement considérer la relation inverse :

$$Q_i = \sum_j C_{ij}\Phi_j \quad (1.56)$$

où les coefficients  $C_{ii}$  sont appelés *coefficients de capacité* car ils sont une mesure de la capacité d'un conducteur à absorber de la charge électrique à un potentiel donné. Les coefficients  $C_{ij}$  ( $i \neq j$ ) sont appelés *coefficients d'influence électrostatique*. Pour un conducteur simple, on a  $Q = C\Phi$  où  $C$  est la *capacité* du conducteur.

L'énergie potentielle d'un système de conducteurs est donc

$$U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i\Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij}\Phi_i\Phi_j \quad (1.57)$$

pour un conducteur simple, cela revient à  $U = \frac{1}{2}C\Phi^2$ . On peut donc introduire une définition différente des coefficients  $C_{ij}$ , comme étant les dérivées partielles secondes de l'énergie électrostatique par rapport aux potentiels :

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial\Phi_i\partial\Phi_j} \quad (1.58)$$

D'après cette définition, il est évident que la matrice  $C$  est symétrique ( $C_{ij} = C_{ji}$ ) car l'ordre de différentiation est sans importance.

Remarques :

1. L'énergie  $U$  doit être une forme quadratique définie positive pour que l'état de moindre énergie soit  $Q_i = 0$ .
2. On peut démontrer en général que  $C_{ii} > 0$  et  $C_{ij} < 0$  si  $i \neq j$  (le signe de la charge induite est l'opposé du signe du potentiel inducteur).

**Exemple 1.3:** Capacités de deux sphères concentriques

Soit deux sphères conductrices concentriques de rayons  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ). Calculer les coefficients  $C_{ij}$  de capacité et d'influence électrostatique.

*Solution :* Soit  $q_a$  et  $q_b$  les charges situées sur les deux sphères. Il est évident que le potentiel  $\Phi(\mathbf{r})$  ne dépend que du rayon  $r$  en coordonnées sphériques et que de la charge totale incluse à l'intérieur de ce rayon. En demandant que le potentiel soit nul à l'infini et continu partout ailleurs, on obtient

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{q_a + q_b}{r} & (r > b) \\ \frac{q_a}{r} + \frac{q_b}{b} & (a < r < b) \\ \frac{q_a}{a} + \frac{q_b}{b} & (r < a) \end{cases} \quad (1.59)$$

On peut donc écrire l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} \Phi_a \\ \Phi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 1/b \\ 1/b & 1/b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_a \\ q_b \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

Les coefficients  $C_{ij}$  sont obtenus par inversion de cette relation :

$$\begin{pmatrix} q_a \\ q_b \end{pmatrix} = \frac{ab}{b-a} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & b/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_a \\ \Phi_b \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

On a donc

$$C_{11} = \frac{ab}{b-a} \quad , \quad C_{12} = C_{21} = -\frac{ab}{b-a} \quad , \quad C_{22} = \frac{b^2}{b-a} \quad (1.62)$$

## 1.4 Multipôles

Dans cette section nous appliquons la formule (1.17) au cas où la distribution  $\rho(\mathbf{r}')$  est confinée dans un espace petit comparé à la distance au point d'observation. Il est intuitivement clair que le potentiel créé par une distribution de charge doit ressembler au potentiel d'une charge ponctuelle  $q$  ( $q$  est la charge totale de la distribution) si on se place suffisamment loin des sources. Cependant, des corrections existent à cette approximation, qui sont capitales si la charge totale est nulle. Si  $a$  est la taille typique de la distribution de charge (plus précisément le rayon de la plus petite sphère qui englobe toute la distribution) et si  $r$  est la distance entre le point d'observation et la distribution, un développement systématique du potentiel en une série de puissances de  $a/r$  est possible : c'est le développement multipolaire.

Une connaissance des polynômes de Legendre est essentielle pour la compréhension de cette section; voir l'annexe à la fin de ce chapitre. Le résultat principal dont nous avons besoin est le développement en série suivant [cf. Éq. (1.209)]:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(t)$$

où  $r \equiv |\mathbf{r}|$ ,  $r' \equiv |\mathbf{r}'|$ ,  $t = \cos \angle \mathbf{r}\mathbf{r}'$  et  $P_l$  est le polynôme de Legendre d'ordre  $l$ . Pour que cette série converge, il faut que  $r' < r$ . Si nous substituons ce développement dans la formule (1.17), l'expression du potentiel devient à son tour une série infinie :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \Phi^{(2^l)}(\mathbf{r}) \quad (1.63)$$

où  $\Phi^{(2^l)}(\mathbf{r})$  est le potentiel créé par le *multipôle* d'ordre  $l$ :

$$\Phi^{(2^l)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^{l+1}} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r'^l P_l(\cos \gamma) \quad (1.64)$$

Le potentiel multipolaire  $\Phi^{(2^l)}(\mathbf{r})$  diminue avec la distance comme  $1/r^{l+1}$ . De plus, il dépend de la direction, sauf pour  $l = 0$ . Si le rayon caractéristique de la distribution est  $a$ ,  $\Phi^{(2^l)}$  sera aussi proportionnel à  $a^l$  fois une quantité ayant les unités de la charge électrique.

Le premier terme de la série (1.64) est le potentiel monopolaire ( $l = 0$ ):

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') = \frac{q}{r} \quad (1.65)$$

Il s'agit du potentiel obtenu en négligeant la structure interne de la distribution de charge, c.-à-d., en ne considérant que la charge totale, ou monopôle. Ce terme domine les autres aux grandes distances, sauf s'il s'annule.

### 1.4.1 Moment Dipolaire Électrique

Le deuxième terme ( $l = 1$ ) de la série (1.64) est le potentiel dipolaire :

$$\Phi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r' \cos \gamma = \frac{1}{r^3} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r} \quad (1.66)$$

On définit le *moment dipolaire*  $\mathbf{d}$  de la distribution comme

$$\mathbf{d} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \quad (1.67)$$

Alors le potentiel dipolaire s'exprime comme

$$\Phi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^3} \mathbf{d} \cdot \mathbf{r} \quad (1.68)$$

Dans le cas où la charge totale de la distribution est nulle, ce potentiel est le terme est le plus important de la série (1.64).

Le champ électrique correspondant est

$$\mathbf{E} = -\nabla(1/r^3) \mathbf{d} \cdot \mathbf{r} - (1/r^3) \mathbf{d} = \frac{1}{r^5} (3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - \mathbf{d} r^2) \quad (1.69)$$

Remarquons que le champ dipolaire varie comme  $1/r^3$  et qu'il est deux fois plus fort le long de l'axe du dipôle que perpendiculairement et a une direction opposée.

Comme exemple d'une distribution ponctuelle de charge nulle possédant un moment dipolaire non nul, considérons une charge  $-q$  placée à l'origine ( $\mathbf{r}' = 0$ ) et une charge  $+q$  située à  $\mathbf{r}' = \mathbf{a}$ . La distribution de charge est alors

$$\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{a}) - q\delta(\mathbf{r}') \quad (1.70)$$

La définition (1.67) donne  $\mathbf{d} = q\mathbf{a}$ . En d'autres termes, le moment dipolaire est selon l'axe qui relie les deux charges, vers la charge positive. Sa valeur absolue est alors  $qa$ , où  $a$  est la distance entre les charges.

La charge totale (monopôle) ne dépend pas de l'origine des coordonnées. Cependant, le moment dipolaire dépend en général du choix de l'origine. Si on calcule le moment dipolaire par rapport à une nouvelle origine  $O'$  située à une position  $\mathbf{a}$  par rapport à l'ancienne origine  $O$ , on trouve

$$\mathbf{d}' = \int d^3r \rho(\mathbf{r})(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \mathbf{d} - q\mathbf{a} \quad (1.71)$$

où  $\mathbf{d}$  est le moment dipolaire par rapport à l'origine  $O$ . On remarque que si  $q = 0$ , alors le moment dipolaire est indépendant de l'origine. Il s'agit d'une propriété générale : le moment multipolaire non nul le plus bas ne dépend pas de l'origine des coordonnées, mais tous les autres en dépendent.

### 1.4.2 Moment Quadrupolaire Électrique

Le troisième terme de la série (1.64) est le potentiel *quadrupolaire*:

$$\begin{aligned} \Phi^{(4)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2r^5} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') (3(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})^2 - r'^2 r^2) \\ &= \frac{1}{6r^5} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \\ &= \frac{1}{6r^5} Q_{ij} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \end{aligned} \quad (1.72)$$

Ici nous avons utilisé la convention de sommation sur les indices répétés et nous avons défini le *tenseur quadrupolaire*:

$$Q_{ij} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \quad (1.73)$$

#### Remarques

1. La trace du tenseur quadrupolaire s'annule :  $Q_{ii} = 0$  (indice sommé). Donc on peut écrire

$$\Phi^{(4)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2r^5} Q_{ij} x_i x_j \quad (1.74)$$

2. Ce tenseur est symétrique ( $Q_{ij} = Q_{ji}$ ). Par conséquent, il est possible de trouver un système d'axes orthogonaux (dits *axes principaux* du tenseur) dans lequel le tenseur est diagonal. Celui-ci comporte alors trois composantes ( $Q_{11}$ ,  $Q_{22}$  et  $Q_{33}$ ) reliées par la contrainte de trace nulle :  $Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$ .

3. Si la distribution de charge possède une symétrie de rotation autour d'un axe (ex.  $z$ ) alors  $Q_{xx} = Q_{yy}$ . En appelant  $Q_{zz} = Q$  le *moment quadrupolaire* de la distribution, il s'ensuit que  $Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q$ . Dans ce cas, le potentiel quadrupolaire devient

$$\Phi^{(4)}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4r^5}(2z^2 - x^2 - y^2) \quad (1.75)$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\Phi^{(4)}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4r^3}(3\cos^2\theta - 1) \quad (1.76)$$

4. Si  $\rho > 0$  et que la distribution est allongée, alors  $Q > 0$ . Si, au contraire, la distribution est aplatie, alors  $Q < 0$ . L'inverse est vrai si  $\rho < 0$ . Le moment quadrupolaire d'une distribution de charge comportant une densité à peu près uniforme nous permet de caractériser la forme de cette distribution.

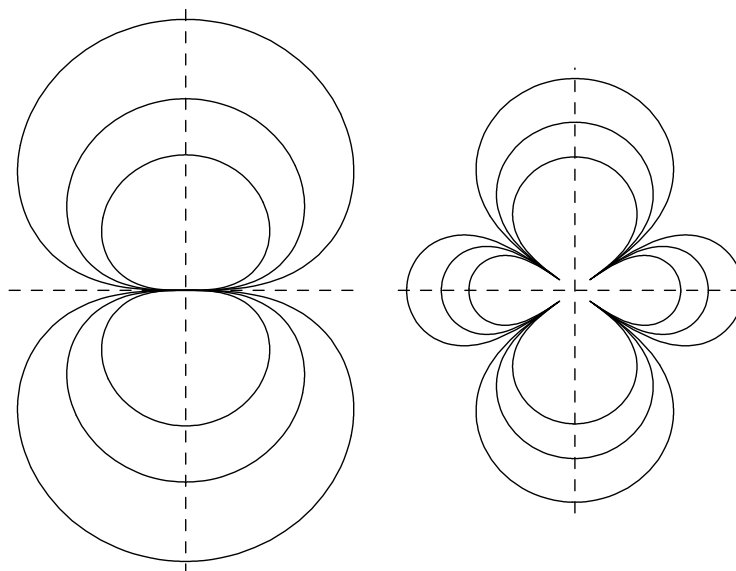


Figure 1.1. Équipotentielles d'un dipôle (à gauche) et d'un quadrupôle à symétrie azimutale (à droite)

5. On peut obtenir un quadrupôle en plaçant côte à côte deux dipôles de signes opposés (ce procédé est général pour obtenir un  $l$ -pôle à l'aide de deux  $(l-1)$ -pôles).

### 1.4.3 Théorème d'addition et forme générale

Une expression différente du développement multipolaire peut être obtenue en mettant à profit la formule d'addition des harmoniques sphériques :

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (1.77)$$

où  $\gamma$  est l'angle entre les point  $(\theta', \varphi')$  et  $(\theta, \varphi)$  sur la sphère (on utilise les coordonnées sphériques pour  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$ ). On obtient alors le développement

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{r'}{r}\right)^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (1.78)$$

L'expression du potentiel multipolaire devient alors

$$\Phi^{(2')}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^{l+1}} \sum_m \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi) q_{lm} \quad (1.79)$$

où on définit le moment multipolaire

$$q_{lm} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \quad (1.80)$$

L'avantage de cette formulation en fonction des harmoniques sphériques est que l'on connaît bien la dépendance angulaire de ces derniers, ainsi que la façon dont ils se transforment lorsqu'on effectue une rotation ou une inversion de l'espace.

#### 1.4.4 Énergie d'une distribution de charge dans un potentiel externe

Considérons une distribution de charge avec densité  $\rho(\mathbf{r})$  confinée dans une région finie de l'espace où s'applique un champ électrique externe (c'est-à-dire produit par une source autre que  $\rho$ , située hors de la région considérée). Ce champ électrique externe  $\mathbf{E}$  peut être caractérisé par un potentiel électrique  $\Phi(\mathbf{r})$ . Soit  $W$  l'énergie potentielle de notre distribution dans ce potentiel externe  $\Phi(\mathbf{r})$ :

$$W = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) \quad (1.81)$$

Cette expression est une extension simple de l'énergie potentielle  $q\Phi(\mathbf{r})$  d'une charge ponctuelle dans un potentiel. Nous devons comparer cette expression avec les formules (1.37) et (1.39) pour l'énergie *interne* de la distribution, qui est l'énergie nécessaire pour assembler les charges qui la forment. Dans (1.37) le potentiel  $\Phi$  est celui-là même qui est produit par la distribution  $\rho$ , alors qu'ici il s'agit d'un potentiel externe produit par une autre source et qui satisfait donc  $\nabla^2\Phi = 0$  dans la région de l'espace considérée ici. On s'intéresse ici à l'*énergie d'interaction* de la distribution avec le potentiel électrostatique externe.

Pour évaluer approximativement cette énergie, on peut développer  $\Phi(\mathbf{r})$  en série de Taylor autour de l'origine des coordonnées, qu'on place convenablement quelque part au centre de notre distribution :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(0) + x_i \partial_i \Phi(0) + \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \partial_j \Phi(0) + \dots \quad (1.82)$$

En substituant ce développement dans l'expression pour  $W$ , on trouve

$$W = q\Phi(0) + \partial_i \Phi(0) \int d^3r \rho(\mathbf{r}) x_i + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j \Phi(0) \int d^3r \rho(\mathbf{r}) x_i x_j + \dots \quad (1.83)$$

où  $q$  est la charge totale de la distribution. Le deuxième terme est simplement  $-\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$  et le troisième peut être écrit comme

$$\frac{1}{6} \partial_i \partial_j \Phi(0) \left( Q_{ij} + 3\delta_{ij} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) r^2 \right) \quad (1.84)$$

Le deuxième terme de cette expression s'annule, puisque  $\delta_{ij} \partial_i \partial_j \Phi = \nabla^2 \Phi = 0$  en dehors des sources de  $\Phi$ . Donc on peut écrire, au deuxième ordre en dérivées,

$$W = q\Phi(0) - \mathbf{E}(0) \cdot \mathbf{d} - \frac{1}{6} \partial_i E_j(0) Q_{ij} + \dots \quad (1.85)$$

### Remarques

1. Le premier terme représente l'énergie d'interaction de la distribution comme si toute sa charge était concentrée à l'origine.
2. Il ressort du deuxième terme qu'un dipôle électrique cherche à s'aligner sur le champ électrique pour minimiser l'énergie d'interaction.

La force agissant sur une distribution de charge localisée causée par un champ électrique externe est

$$\mathbf{F} = \int d^3r \rho(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1.86)$$

Une série de Taylor au premier ordre pour  $\mathbf{E}$  donne

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(0) + x_i \partial_i \mathbf{E}|_0 + \dots \quad (1.87)$$

Les deux premiers termes dans la force totale sont donc

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(0) + (\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{E}|_0 + \dots \quad (1.88)$$

On constate que la force ressentie par un dipôle dépend non pas du champ lui-même, mais de son gradient :

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{dip.}} = p^i \partial_i \mathbf{E}|_0} \quad \text{ou} \quad \mathbf{F}_{\text{dip.}} = (\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{E}|_0 \quad (1.89)$$

De même, le couple qui s'exerce sur un dipôle électrique est, à l'ordre zéro,

$$\mathbf{N} = \int d^3r \rho(\mathbf{r})\mathbf{r} \wedge \mathbf{E}(0) = \mathbf{d} \wedge \mathbf{E}(0) \quad (1.90)$$

Ces résultats sont tout-à-fait compatibles avec l'énergie d'interaction  $-\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$  du dipôle dans un champ électrique.

On peut facilement observer dans la vie courante les effets de la force  $(\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{E}$  agissant sur un dipôle. Lorsqu'un objet devient chargé d'électricité – par exemple, un peigne qu'on vient de frotter à ses cheveux – il peut attirer des objets légers, comme des bouts de papier. On peut expliquer le phénomène comme suit : la charge déposée sur le peigne crée un champ électrique diminuant avec la distance qui polarise le papier. Les dipôles microscopiques contenus dans le papier sont parallèles au champ et attirés dans la direction où le champ augmente, c'est-à-dire vers le peigne. Le même peigne peut aussi attirer vers lui un mince filet d'eau coulant d'un robinet, car l'eau est une substance très polarisable (voir la section sur les diélectriques).

La notion de moment quadropolaire peut être appliquée entre autres à la description des noyaux atomiques. L'état quantique d'un noyau peut être caractérisé notamment par son spin  $I$  et la projection  $M$  de ce spin selon l'axe  $z$ . Dans un état quantique donné  $|I, M\rangle$ , la distribution de charge peut être telle que le moment quadropolaire  $Q$  du noyau est non nul (en raison de la symétrie azimutale de l'état quantique considéré, le tenseur  $Q_{ij}$  n'a qu'une seule composante indépendante non nulle). Si le noyau est placé à un endroit où le champ électrique possède un gradient non nul, par exemple dans une position donnée d'une structure cristalline, alors le terme quadropolaire de l'énergie d'interaction (1.85) s'ajoute à l'hamiltonien  $H$  du noyau et lève la dégénérescence entre les états  $|I, M\rangle$  ayant des valeurs de  $M$  différentes. On peut alors observer des sauts quantiques entre ces états, à l'aide d'ondes radio : c'est ainsi que la forme des noyaux est observée.



## 1.5 Méthodes de solution de l'équation de Laplace

### 1.5.1 Propriétés des fonctions harmoniques

Dans un milieu dépourvu de charge, le potentiel  $\Phi$  satisfait à l'équation de Laplace  $\nabla^2\Phi = 0$  avec certaines conditions aux limites imposées le plus souvent par des conducteurs ou un champ électrique externe. Cette équation jouit des propriétés suivantes :

1. L'équation est linéaire. Donc si  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont des solutions de l'équation de Laplace dans un volume donné, alors la combinaison  $a\Phi_1 + b\Phi_2$  l'est aussi ( $a$  et  $b$  sont des constantes).
2. Dans un domaine borné par une surface sur laquelle  $\Phi$  est spécifié (conditions aux limites de Dirichlet), la solution de  $\nabla^2\Phi = 0$  est *unique*. Si c'est le champ électrique  $\mathbf{E}$  qui est spécifié sur la surface au lieu de  $\Phi$  (conditions aux limites de Neumann), la solution de  $\nabla^2\Phi = 0$  est unique modulo une constante additive.

Pour démontrer ce théorème d'unicité, utilisons l'*identité de Green*:

$$\oint_S \mathbf{da} \cdot f \nabla g = \int_V d^3r (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) \quad (1.91)$$

qui se prouve par le théorème de la divergence. Ensuite, substituons  $f = g = \Phi_1 - \Phi_2$ , où  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont deux solutions hypothétiques du même problème aux limites. Quelles que soient les conditions aux limites choisies (Dirichlet ou Neumann), le produit  $f \nabla f$  s'annule sur la surface et  $\nabla^2 f = 0$  dans  $V$ . La première identité de Green donne donc

$$\int_V d^3r (\nabla f)^2 = 0 \quad \implies \quad f = \Phi_1 - \Phi_2 = \text{const.} \quad (1.92)$$

Cette constante est évidemment zéro dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet

3. La solution  $\Phi$  n'admet aucun maximum ou minimum dans le domaine où  $\nabla^2\Phi = 0$ . Dans le cas contraire, il y aurait un flux électrique non nul sur une sphère infinitésimale entourant l'extrémum, ce qui impliquerait une charge non-nulle à l'intérieur, ce qui n'est pas le cas puisque  $\nabla^2\Phi = 0$ . On en tire la conclusion qu'il ne peut y avoir de configuration statique de charges ponctuelles qui soit stable, car aucune de ces charges ne peut trouver un minimum local de son énergie potentielle.

#### Exemple 1.4: Méthode des images

La *méthode des images* permet de résoudre certains problèmes où des charges sont mises en présence de conducteurs. Elle consiste à remplacer la charge induite sur les surfaces conductrices par des charges ponctuelles fictives (les images) situées dans des régions cachées par ces conducteurs. Par exemple, considérons une charge  $q$  placée à une distance  $a$  d'un plan conducteur infini (c.-à-d. de dimension  $\gg a$ ). Calculer la force agissant sur cette charge.

*Solution :* Choisissons les axes  $x$  et  $y$  dans ce plan, avec origine vis-à-vis la charge. Alors  $\mathbf{E}$  doit être normal au plan à  $z = 0$  et être dominé par la contribution de  $q$  près de  $(0, 0, a)$ . On s'assure de cette condition si on place une image de charge  $-q$  à la position  $(0, 0, -a)$ . Le potentiel est alors

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \quad (1.93)$$

Le plan  $z = 0$  est alors une équipotentielle à  $\Phi = 0$  et a le comportement correct autour de  $(0, 0, a)$ . Il s'agit donc de la solution unique. Au loin, le système ressemble à un dipôle de moment  $\mathbf{d} = 2aq\hat{\mathbf{z}}$ . L'énergie

potentielle de la charge  $q$  en présence du plan est  $U = -q^2/(2a)$ . La force exercée sur la charge est donc donnée par la dérivée par rapport à  $a$  de l'énergie potentielle :

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial a} = -\frac{q^2}{2a^2}\hat{\mathbf{z}} \quad (1.94)$$

Cette force n'est pas égale à la force de Coulomb entre l'image et la charge ( $q^2/4a^2$ ): la raison en est qu'il est impossible de déplacer la charge sans que l'image soit également déplacée; la notion de source indépendante de la charge-test ne s'applique alors pas et  $\mathbf{F} \neq q\mathbf{E}$ . Dans ce genre de problème, il faut calculer la force à partir du gradient de l'énergie potentielle.

### 1.5.2 Séparation des variables (général)

Nous avons vu que la solution de l'équation de Laplace satisfaisant à des conditions aux limites complètes, c'est-à-dire la donnée de  $\Phi$  ou de  $\mathbf{E}$  sur toute la surface ou frontière entourant le volume considéré, est unique. Cependant, si on considère une partie seulement des conditions aux limites, c'est-à-dire sur une partie seulement de la surface entourant le domaine d'intérêt, alors la solution n'est pas unique. Si  $\Phi$  est égal à zéro sur cette partie de la frontière, l'ensemble des solutions forment un espace vectoriel sur lequel on peut choisir une base, de préférence orthonormale. La solution unique recherchée quand on tient compte de toutes les conditions aux limites est alors une combinaison linéaire unique de ces fonctions de base.

La méthode de séparation des variables consiste à trouver une base telle que les fonctions de base sont des produits de fonctions de chacune des 3 coordonnées et qu'une partie des conditions aux limites peut être satisfaite avec les fonctions de base elles-mêmes, ce qui réduit le nombre de vecteurs de base à considérer. C'est la géométrie de la frontière qui détermine le système de coordonnées à utiliser.

### 1.5.3 Séparation des variables en coordonnées cartésiennes

Dans ce cas, l'équation de Laplace s'écrit

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.95)$$

Nous cherchons des solutions *particulières* (les fonctions de base mentionnées ci-haut) sous la forme d'un produit de fonctions à une variable :

$$\Phi(\mathbf{r}) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (1.96)$$

Appliquée à une fonction de cette forme, l'équation de Laplace devient

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0 \quad (1.97)$$

Cette équation étant valide pour toutes valeurs de  $x$ ,  $y$  et  $z$ , chacun des termes doit être constant :

$$\frac{X''}{X} = a^2 \quad \frac{Y''}{Y} = b^2 \quad \frac{Z''}{Z} = -a^2 - b^2 \quad (1.98)$$

Nous avons écrit des constantes au carré par convenance, sans supposer nécessairement que  $a^2$  et  $b^2$  sont des nombres réels positifs : en réalité,  $a$  et  $b$  peuvent être complexes. Ce sont les conditions aux limites qui imposeront des restrictions sur  $a$  et  $b$ .

La solution correspondant à des valeurs particulières de  $a$  et  $b$  est alors

$$\Phi(\mathbf{r}) = C(a, b)e^{\pm ax}e^{\pm by}e^{\pm iz\sqrt{a^2+b^2}} \quad (1.99)$$

où  $C(a, b)$  est une constante quelconque. Dans chaque facteur, le signe  $+$  ou  $-$  peut être choisi : il y a donc 8 solutions indépendantes pour chaque valeur de  $a$  et  $b$ . Les fonctions  $\cosh(ax)$  et  $\sinh(ax)$  peuvent être utilisées au lieu de  $e^{\pm ax}$ . De même,  $\cos(\alpha x)$  et  $\sin(\alpha x)$  peuvent être utilisés si  $a = i\alpha$  est imaginaire.

**Exemple 1.5:** *Potentiel dans une boîte*

Une boîte de dimensions  $a$  par  $b$  par  $c$  (dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement) est maintenue à un potentiel nul sauf sur la face  $z = 0$  qui est maintenue à  $\Phi = V$ . Trouver  $\Phi$  à l'intérieur de la boîte.

*Solution :* L'approche à suivre est de trouver une base de solutions de l'équation de Laplace satisfaisant aux conditions aux limites  $\Phi = 0$  à  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$  et  $z = c$ . Ensuite, il faut trouver la combinaison linéaire unique des fonctions de base qui satisfait à la condition  $\Phi(x, y, 0) = V$ . On écrit la décomposition  $\Phi(\mathbf{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$ . Les conditions imposées aux fonctions  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont

$$X(0) = X(a) = 0 \quad Y(0) = Y(b) = 0 \quad Z(c) = 0 \quad (1.100)$$

Les solutions sont donc

$$X_m(x) = \sin(m\pi x/a) \quad Y_n(y) = \sin(n\pi y/b) \quad m, n \in \mathbb{N}^+ \quad (1.101)$$

et

$$Z_{m,n}(z) = \sinh(\gamma_{mn}(c - z)) \quad \gamma_{mn}^2 = \pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2) \quad (1.102)$$

Nos fonctions de base sont alors

$$\Phi_{mn}(x, y, z) = \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \sinh(\gamma_{mn}(c - z)) \quad (1.103)$$

Ces fonctions ne sont pas normalisées. Toutes ces fonctions satisfont aux conditions aux limites sur toutes les faces sauf sur  $z = 0$ . De plus, elles sont orthogonales. On cherche donc une combinaison linéaire telle que

$$\sum_{m,n} c_{mn} \Phi_{mn}(x, y, 0) = V \quad \forall x, y$$

Définissons le produit scalaire des fonctions sur le plan  $xy$  comme

$$\langle f|g \rangle = \int_0^a dx \int_0^b dy f(x, y, 0)^* g(x, y, 0) \quad (1.104)$$

On montre facilement (les intégrales sont élémentaires) que

$$\langle \Phi_{mn} | \Phi_{rs} \rangle = \frac{1}{4} ab \sinh^2(\gamma_{mn}c) \delta_{mr} \delta_{ns} \quad (1.105)$$

Si on prend le produit scalaire de  $\Phi_{rs}$  avec la condition aux limites (1.103), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{rs} | \Phi_{rs} \rangle_{c_{rs}} &= \langle \Phi_{rs} | V \rangle \\ &= \frac{2a}{r\pi} \frac{2b}{s\pi} V \sinh(\gamma_{mn}c) \end{aligned} \quad (1.106)$$

(ce n'est que dans cette dernière équation qu'on a supposé que  $V$  est une constante). On conclut donc que

$$c_{rs} = \frac{16V}{rs\pi^2 \sinh(\gamma_{mn}c)} \quad (1.107)$$

Nous avons donc trouvé les coefficients de la combinaison linéaire unique qui satisfait à toutes les conditions aux limites. Le problème est résolu.

### 1.5.4 Séparation des variables en coordonnées sphériques

Dans ce cas l'équation de Laplace s'écrit (cf. Éq. (1.210))

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1.108)$$

On cherche des solutions particulières du type

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = R(r)P(\theta)Q(\varphi) \quad (1.109)$$

Profitons de notre expérience en mécanique quantique pour accélérer notre analyse : l'opérateur du carré du moment cinétique  $\mathbf{L}^2$  s'écrit, à un facteur multiplicatif  $\hbar^2$  près, comme suit

$$\mathbf{L}^2 = - \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \quad (1.110)$$

et alors le Laplacien est

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \mathbf{L}^2 \quad (1.111)$$

Appelons  $Y(\theta, \varphi) = P(\theta)Q(\varphi)$  la partie angulaire de notre solution particulière. L'équation de Laplace devient alors (multipliée par  $r^2$  et divisée par  $\Phi$ ):

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{1}{Y} \mathbf{L}^2 Y = 0 \quad (1.112)$$

Les deux membres de cette équation doivent être constants séparément. Dans le cas du deuxième terme, on connaît la solution : il s'agit des harmoniques sphériques  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ :

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (1.113)$$

qui sont les fonctions propres du carré du moment cinétique :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ L_z Y_{lm}(\theta, \varphi) &= m Y_{lm}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (1.114)$$

L'équation radiale devient alors

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - l(l+1)R = 0 \quad (1.115)$$

Les solutions de cette équation sont des puissances :

$$R(r) = r^l \quad \text{où} \quad R(r) = \frac{1}{r^{l+1}} \quad (1.116)$$

Il s'ensuit que la solution générale de l'équation de Laplace est

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \left( A_l^m r^l + \frac{B_l^m}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (1.117)$$

Dans le cas d'un problème à symétrie azimutale, seuls les termes avec  $m = 0$  contribuent :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_l \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (1.118)$$

Notez que les constantes  $A_l$  et  $B_l$  ne sont pas les mêmes ici que dans l'équation précédente.

Si on désire faire abstraction d'une connaissance quelconque de la mécanique quantique, alors il faut démontrer de manière indépendante la solution générale (1.117). Indiquons plutôt comment démontrer la solution générale (1.118) dans le cas d'une symétrie azimutale, ce qui est plus simple. On suppose alors que la solution est de la forme  $\Phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ . La séparation des variables nous donne l'équation (1.115) pour la fonction radiale, où la constante  $l$  est à priori quelconque. Les solutions  $R(r)$  sont les mêmes que ci-haut. La fonction  $\Theta$ , elle, satisfait à l'équation de Legendre (1.207) lorsqu'on l'exprime en fonction de  $t \equiv \cos \theta$ . Des solutions à cette équation existent pour toutes les valeurs réelles de  $l$ , mais c'est uniquement quand  $l$  est un entier non négatif que ces solutions sont finies à  $\cos \theta = \pm 1$ , ce qui est requis ici. Dans ce cas, les solutions sont les polynômes de Legendre et on trouve en fin de compte la solution générale (1.118).

**Exemple 1.6:** *Potentiel autour d'une sphère métallique dans un champ uniforme*

*Une sphère conductrice est placée dans un champ électrique uniforme. Trouver comment l'introduction de cet objet perturbe le potentiel électrique.*

*Solution :* Dans le but de minimiser son énergie, la sphère conductrice va accumuler des charges négatives dans la direction  $-z$  et des charges positives dans la direction  $+z$ , de façon à créer une distribution dipolaire induite. Voyons comment ceci fonctionne quantitativement. On sait que le potentiel à l'infini a la forme  $\Phi = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$  ou encore  $\Phi = -E_0 r P_1(\cos \theta)$ . En raison de la symétrie azimutale, on écrit la solution sous la forme (1.118). Quand  $r \rightarrow \infty$ , seul  $P_1$  doit contribuer et donc  $A_l = 0$  pour  $l \neq 1$  et  $A_1 = -E_0$ . D'autre part,  $\Phi$  doit être constant sur la sphère ( $r = a$ ):

$$A_1 a \cos \theta + \sum_l \frac{B_l}{a^{l+1}} P_l(\cos \theta) = \text{const.} \quad (1.119)$$

Pour que cette identité soit valide  $\forall \theta$ , il faut que les coefficients des puissances de  $\cos \theta$  soient identiques de part et d'autre :

$$B_l = 0 \quad \text{si} \quad l > 1 \quad -E_0 a + B_1/a^2 = 0 \quad B_0/a = \text{const.} \quad (1.120)$$

La solution est donc

$$\Phi(\mathbf{r}) = -E_0(r - a^3/r^2) \cos \theta + B_0/r \quad (1.121)$$

On voit que  $B_0 = q$ , la charge nette déposée sur la sphère, c.-à-d. une donnée du problème. La dépendance supplémentaire en  $1/r^2$  est celle d'un dipôle électrique induit par le champ externe. Le moment dipolaire correspondant a comme valeur absolue  $p = E_0 a^3$ . Nous aurions pu conclure dès le départ que la charge induite sur la sphère ne comporterait aucun moment multipolaire supérieur, pour la raison suivante : comme le champ extérieur dans lequel la sphère est plongée ne possède aucun gradient ou dérivée d'ordre supérieur, l'énergie électrostatique de la sphère ne peut être abaissée en créant un quadrupôle induit (ou aucun moment d'ordre supérieur). De tels moments multipolaires sont alors inutiles et ne sont pas induits.

**Exemple 1.7:** Charge ponctuelle dans une sphère conductrice

Une charge ponctuelle  $q$  est placée à une distance  $a$  du centre d'une sphère conductrice creuse de rayon  $b$ . Trouver le potentiel partout (à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère) dans les cas  $a < b$  (la charge est à l'intérieur de la sphère).

*Solution :* Travaillons en coordonnées sphériques, avec la charge située sur l'axe  $z$ . Le potentiel  $\Phi$  satisfait à l'équation de Poisson  $\nabla^2 \Phi = -4\pi q \delta(\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{z}})$ . La solution générale de cette équation inhomogène est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Écrivons donc  $\Phi = \Phi_q + \Phi_s$ , où  $\Phi_q = q/|\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{z}}|$  est le potentiel créé par la charge ponctuelle et  $\Phi_s$  est le potentiel créé par la charge induite sur la sphère. La charge induite sur la sphère se répartit de façon à ce que  $\Phi$  soit constant sur la sphère. On suppose que la sphère est neutre (la charge induite totale est nulle). Comme  $\Phi_q$  satisfait à l'équation de Poisson ci-haut,  $\Phi_s$  doit satisfaire à l'équation de Laplace. On peut donc l'exprimer comme suit, à l'intérieur ( $\Phi_s^{(int)}$ ) et à l'extérieur ( $\Phi_s^{(ext)}$ ):

$$\Phi_s^{(int)}(\mathbf{r}) = \sum_l A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad \Phi_s^{(ext)}(\mathbf{r}) = \sum_l \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (1.122)$$

Nous avons utilisé la symétrie azimutale du problème et la condition que  $\Phi_s^{(int)}$  doit être fini quand  $r = 0$  et  $\Phi_s^{(ext)}$  fini quand  $r \rightarrow \infty$ . D'autre part, d'après le développement (1.62) on peut écrire

$$\Phi_q(\mathbf{r}) = \begin{cases} q \sum_l \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(\cos \theta) & (r < a) \\ q \sum_l \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) & (r > a) \end{cases} \quad (1.123)$$

Sur la sphère ( $r = b$ ) le potentiel total peut être écrit à la fois à l'aide de  $\Phi_s^{(int)}$  et de  $\Phi_s^{(ext)}$ :

$$\begin{aligned} \Phi(b, \theta) &= \sum_l \left( A_l b^l + q \frac{a^l}{b^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \\ &= \sum_l \frac{B_l + qa^l}{b^{l+1}} P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (1.124)$$

Comme cette expression doit être une constante indépendante de  $\theta$ , chaque coefficient de  $P_l$  doit être nul, sauf peut-être celui de  $P_0$ . On a donc  $A_l = -qa^l/b^{2l+1}$  et  $B_l = -qa^l$ , pour  $l > 0$ . Le potentiel de la sphère

est alors  $A_0 + q/b = B_0 + q/b$ . Comme la sphère est neutre, le potentiel à l'infini doit être  $q/r$ : on en conclut que  $A_0 = B_0 = 0$ . La solution complète est donc

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta) &= \frac{q}{a} + \sum_{l=1} \frac{qr^l}{a^{l+1}} \left(1 - (a/b)^{2l+1}\right) P_l(\cos \theta) \quad (r < a) \\ &= \frac{q}{r} + \sum_{l=1} \frac{qa^l}{r^{l+1}} \left(1 - (r/b)^{2l+1}\right) P_l(\cos \theta) \quad (a < r < b) \\ &= \frac{q}{r} \quad (r > b)\end{aligned}\tag{1.125}$$

Remarquez que le potentiel à l'extérieur de la sphère est isotrope, en dépit du fait que la distribution de charge sur la sphère et à l'intérieur de celle-ci n'est pas isotrope. C'est une propriété générale : le potentiel à l'extérieur d'une sphère conductrice sera toujours  $q/r$  si aucune charge n'est située à l'extérieur, qu'importe la distribution spatiale de la charge  $q$  à l'intérieur de la sphère. C'est une conséquence du théorème d'unicité où les conditions aux limites sont ici fixées sur la sphère et à l'infini.

### 1.5.5 Séparation des variables en coordonnées cylindriques

Dans ce cas l'équation de Laplace s'écrit

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0\tag{1.126}$$

On cherche des solutions particulières de la forme

$$\Phi(r, \varphi, z) = R(r)Q(\varphi)Z(z)\tag{1.127}$$

Alors l'équation de Laplace devient (multipliée par  $r^2$  et divisée par  $\Phi$ ):

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} + \frac{r^2}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0\tag{1.128}$$

Le terme du milieu doit être constant, car il ne dépend que de  $\varphi$ :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} = -n^2 Q \Rightarrow Q(\varphi) = e^{\pm in\varphi}\tag{1.129}$$

Notre équation devient ensuite (divisée par  $r^2$ )

$$\frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0\tag{1.130}$$

Le dernier terme doit maintenant être constant :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = k^2 Z \Rightarrow Z(z) = e^{\pm kz}\tag{1.131}$$

(Il se peut que  $k$  prenne des valeurs imaginaires). L'équation pour  $R$  se réduit donc à:

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - n^2) R = 0\tag{1.132}$$

En introduisant la variable  $u = kr$  on obtient l'équation de Bessel :

$$u^2 R'' + uR' + (u^2 - n^2)R = 0 \quad (1.133)$$

Les solutions sont connues :

$$R(r) = J_n(kr) \quad \text{où} \quad R(r) = N_n(kr) \quad (1.134)$$

Notez que l'ordre de la fonction de Bessel (ou de Neumann) est l'exposant angulaire  $n$ . La solution générale est donc

$$\Phi(r, \varphi, z) = \sum_{m,n} (A_{mn} J_n(k_m r) + B_{mn} N_n(k_m r)) (\cos(n\varphi) + C_{mn} \sin(n\varphi)) (\cosh(k_m z) + D_{mn} \sinh(k_m z)) \quad (1.135)$$

On a supposé que  $k$  peut prendre un ensemble discret de valeurs  $\{k_m\}$ . Si  $k$  prend des valeurs imaginaires, alors on doit remplacer les fonctions de Bessel et de Neumann par les fonctions de Bessel modifiées  $I_n$  et  $K_n$ .

Le cas où  $k = 0$  doit être considéré séparément. Le potentiel ne dépend alors pas de  $s$  et le problème est réduit à celui de l'équation de Laplace sur le plan  $xy$ . L'équation radiale est dans ce cas

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) - n^2 R = 0 \quad (1.136)$$

dont la solution est  $R(r) = r^{\pm n}$ , sauf si  $n = 0$ , dans lequel cas elle est  $R = \text{const.}$  ou  $R = \ln r$ . On peut donc écrire la solution générale :

$$\Phi(r, \varphi, z) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^n} \right) (\cos(n\varphi) + C_n \sin(n\varphi)) \quad (1.137)$$

## 1.6 Diélectriques

### 1.6.1 Origine microscopique de la polarisation

Au sein d'un matériau, le nombre de charges en présence est trop grand et leur mouvement trop compliqué pour qu'on puisse espérer décrire précisément le champ électrique en tout point et calculer les forces qui en résultent. On doit se limiter à considérer la valeur *moyenne* du champ électrique dans une région donnée et son effet *moyen* sur le matériau. L'objet de cette section est de présenter les concepts à la base d'une description *macroscopique* de l'électromagnétisme dans les matériaux.

Tout d'abord, signalons que tout calcul des propriétés d'un matériau à partir de ses constituants microscopiques (atomes ou molécules) doit nécessairement être basé sur les méthodes de la mécanique quantique et de la mécanique statistique. Il serait illusoire d'espérer utiliser la mécanique classique dans ce cas et d'en tirer des conclusions correctes au point de vue quantitatif. Cependant, un modèle classique (le modèle de Drude) sera utile pour faire ressortir les effets principaux.



Dans le but de comprendre l'effet d'un champ électrique sur un matériau, il est souhaitable de comprendre en premier l'effet d'un champ électrique sur une molécule ou un atome de ce matériau. Considérons à cet effet un atome isolé, en présence d'un champ électrique  $\mathbf{E}$ . Sous l'influence de ce champ, le nuage électronique de l'atome est déplacé par rapport au noyau et l'atome neutre développe un moment dipolaire électrique non nul  $\mathbf{d}$ . Si le champ appliqué est faible en comparaison du champ électrique typique que ressent un électron dans l'atome, on est en droit de supposer que le moment dipolaire induit  $\mathbf{d}$  sera proportionnel au champ appliqué:

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{E} \quad (1.138)$$

où la constante de proportionnalité  $\alpha$  est la *polarisabilité* de l'atome. Si, au contraire, le champ appliqué est trop fort, la réponse de l'atome n'est plus linéaire : à la limite, un champ trop fort pourrait ioniser l'atome, mais un tel champ statique ne peut être produit en laboratoire. Essayons de deviner l'ordre de grandeur du moment dipolaire induit, sur la base uniquement de grandeurs caractéristiques. Adoptons pour cela un modèle extrêmement simplifié de l'atome (le modèle de Drude), dans lequel le nuage électronique est lié au noyau par un 'ressort', c'est-à-dire que la force de rappel du noyau sur le nuage électronique, quand celui-ci est déplacé d'une distance  $x$ , est proportionnelle à  $x$ :  $F = m\omega_0^2 x$ , où  $\omega_0$  est la fréquence caractéristique associée à cette force de rappel linéaire; c'est la fréquence à laquelle l'atome oscille si on le perturbe de son état fondamental. Par conséquent, l'énergie d'ionisation de l'atome est de l'ordre de  $\hbar\omega_0$ . Cette énergie est aussi, d'un point de vue classique, donnée par  $e^2/a_0$ , où  $a_0 = \hbar^2/(me^2)$  est le rayon de Bohr. On conclut donc que

$$\omega_0 \sim \frac{e^2}{\hbar a_0} \quad (1.139)$$

Lorsqu'un champ électrique de grandeur  $E$  est appliqué à l'atome, le déplacement  $x$  du nuage électronique est déterminé par l'équilibre de la force de rappel  $m\omega_0^2 x$  et la force électrique :

$$eE = m\omega_0^2 x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{eE}{m\omega_0^2} \quad (1.140)$$

Le moment dipolaire induit est alors

$$d = ex \sim \frac{E\hbar^2 a_0^2}{me^2} \quad (1.141)$$

Signalons que  $E_a \equiv e/a_0^2$  est le champ électrique typique qui doit exister dans un atome. On peut donc finalement écrire

$$d \sim \frac{E}{E_a} \frac{\hbar^2}{me} = \frac{E}{E_a} ea_0 \quad (1.142)$$

où  $ea_0$  serait le moment dipolaire typique d'un électron dans un atome si l'électron était à un endroit précis dans l'atome, plutôt que réparti dans tout le volume de l'atome. On voit que le moment dipolaire induit est faible devant  $ea_0$  si le champ électrique appliqué  $E$  est petit devant le champ atomique  $E_a$ . On constate aussi que le moment dipolaire induit est proportionnel au champ appliqué, avec une polarisabilité d'ordre  $\alpha \sim ea_0/E_a = a_0^3$  (la polarisabilité a les unités d'un volume).

La polarisabilité d'un atome ou d'une molécule attribuable au réaménagement du nuage électronique – tel que décrit très approximativement ci-dessus – est qualifiée de *polarisabilité électronique* et donne lieu à un moment dipolaire somme toute assez faible. La réponse d'un matériau à un champ externe est beaucoup plus importante si celui-ci est composé de molécules

*polaires*, c'est-à-dire possédant un dipole électrique permanent (la molécule d'eau est l'exemple le plus connu de molécule polaire). L'existence d'un moment dipolaire permanent  $d_0$  dans un molécule est liée à la forme précise des orbitales moléculaires qui effectuent la liaison entre les différents atomes de la molécule : ces orbitales ne sont pas centrées géométriquement sur l'atome central de la molécule (l'atome d'oxygène, dans le cas du  $\text{H}_2\text{O}$ ) et il peut en résulter un moment dipolaire électrique permanent. En l'absence de champ électrique externe, les molécules sont cependant orientées au hasard, de sorte que le moment dipolaire moyen dans un petit volume est nul. Ce type de polarisabilité d'un milieu est qualifié de *paraélectrique*.

Étudions l'effet d'un champ électrique uniforme  $\mathbf{E}$  appliqué à une molécule polaire placée dans un environnement à température absolue  $T$ . Si  $\theta$  est l'angle entre le moment dipolaire  $\mathbf{d}_0$  de la molécule et le champ électrique et si  $\varphi$  est l'angle azimutal associé, l'énergie de la molécule dans ce champ est  $W = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} = -d_0 E \cos \theta$ . La probabilité  $n(\theta, \varphi)$  que la molécule soit orientée dans la direction  $(\theta, \varphi)$  est donnée par la distribution de Boltzmann :

$$n(\theta, \varphi) = \frac{1}{Z} e^{d_0 E \cos \theta / k_B T} \approx \frac{1}{Z} \left\{ 1 + \frac{d_0 E \cos \theta}{k_B T} \right\} \quad (1.143)$$

où nous avons effectué un développement de Taylor au premier ordre, en supposant que le champ appliqué est faible, c'est-à-dire que l'énergie du dipôle permanent dans le champ est petite en comparaison de l'énergie thermique typique :  $d_0 E \ll k_B T$  (on dit qu'il s'agit d'un 'développement à température élevée'). La constante de normalisation  $Z$  est déterminée en sommant sur toutes les orientations possibles :

$$1 = \int \sin \theta d\theta d\varphi n(\theta, \varphi) = \frac{1}{Z} 4\pi \implies Z = 4\pi \quad (1.144)$$

(seul le premier terme de (1.143) contribue). On peut ensuite calculer la composante moyenne du moment dipolaire dans la direction du champ électrique :

$$\begin{aligned} \langle d_0 \cos \theta \rangle &= \frac{d_0}{4\pi} \int \sin \theta d\theta d\varphi n(\theta, \varphi) \cos \theta \\ &= \frac{d_0}{4\pi} \frac{d_0 E}{k_B T} \int \sin \theta d\theta d\varphi \cos^2 \theta \\ &= \frac{d_0^2 E}{3k_B T} \end{aligned} \quad (1.145)$$

(ici, seul le deuxième terme de (1.143) contribue). La relation entre le moment dipolaire moyen et le champ électrique est encore linéaire et permet d'introduire encore un fois la notion de polarisabilité:

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \alpha \mathbf{E} \quad \alpha = \frac{d_0^2}{3k_B T} \quad (1.146)$$

Cette fois-ci, la polarisabilité résulte d'une réorientation moyenne des molécules en présence d'un champ, et varie en raison inverse de la température, pour des températures suffisamment élevées.<sup>6</sup> Cette dépendance en température est appelée *loi de Curie* et est aussi observée dans le domaine magnétique.

<sup>6</sup> Cette dépendance en  $1/T$  n'est vraie qu'à volume constant et non à pression constante. Elle est assez bien vérifiée expérimentalement.

Comme  $k_B T \ll e^2/a_0$  à température ambiante, la polarisabilité paraélectrique est beaucoup plus grande que la polarisabilité électronique. D'autre part, la polarisabilité électronique dépend peu de la température. Une autre différence importante doit être signalée : la polarisabilité électronique est liée aux mouvements des électrons, contrairement à la polarisabilité paraélectrique qui est liée au mouvement de rotation des molécules. Comme l'inertie des électrons est beaucoup plus petite que l'inertie de rotation des molécules (en raison de la grande différence de masse) le nuage électronique peut réagir beaucoup plus rapidement à un champ électrique oscillant. Les deux systèmes sont caractérisés par des fréquences de résonance  $\omega_0$  très différentes. Dans le cas électronique, cette fréquence est dans le domaine ultraviolet, alors que dans le cas paraélectrique, elle est dans le domaine des micro-ondes. Au-delà des fréquences micro-ondes, la polarisabilité de l'eau diminue rapidement et est éventuellement dominée par la contribution électronique à la polarisabilité.

### 1.6.2 Densité de polarisation

Sous l'effet d'un champ électrique, un isolant ne produit pas une densité de courant (contrairement à un conducteur) mais chacun de ses atomes ou de ses molécules développe un certain moment dipolaire électrique moyen. Il se crée alors une polarisation moyenne par unité de volume  $\mathbf{P}$ , donnée par la densité des molécules dipolaires par la valeur moyenne dans la population à un instant donné du dipôle  $\mathbf{d}$  de chaque molécule :  $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{d}(\mathbf{r})N(\mathbf{r})$ . En général  $\mathbf{P}$  dépend de la position, notamment aux interfaces et quand le champ appliqué n'est pas uniforme

Calculons maintenant le potentiel électrique  $\Phi(\mathbf{r})$  causé par une distribution de polarisation  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ . Dans un élément de volume  $d^3r'$ , le dipôle électrique est  $\mathbf{P}(\mathbf{r}')d^3r'$  et le potentiel obtenu en sommant les contributions de tous les dipôles microscopiques est, d'après la relation (1.68),

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \int d^3r' \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \int d^3r' \mathbf{P} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= - \int d^3r' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \oint da \cdot \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\end{aligned}\tag{1.147}$$

Dans la dernière équation, nous avons intégré par parties et l'intégrale de surface est prise sur la surface de l'échantillon de matériau diélectrique. L'interprétation est la suivante : le potentiel créé par la distribution de dipôles équivaut à celui créé par une densité de charge volumique  $\rho' = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  plus une densité superficielle de charge  $\rho'_s = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ , où  $\mathbf{n}$  est la normale qui sort de l'échantillon :

$$\boxed{\rho' = -\nabla \cdot \mathbf{P}} \qquad \boxed{\rho'_s = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}\tag{1.148}$$

Cette distribution de charge – volumique ou superficielle – est bien sûr liée au matériau et mérite de ce fait le surnom de *charge liée*. Pour la distinguer de la charge externe au matériau qu'on pourrait y introduire artificiellement, on affuble d'un prime (') les symboles relatifs à la charge liée.

La définition de  $\mathbf{P}$  donnée plus haut (et dans les manuels les plus connus) est ambiguë. En effet, si on imagine un cristal de type ionique dans lequel les charges positives sont déplacées en moyenne par rapport aux charges négatives, comment doit-on définir le dipôle microscopique créé à chaque position du cristal? Pour une charge positive donnée, entourée de charges négatives, le dipôle microscopique dépend du voisin négatif qu'on choisit pour le former. On peut ainsi obtenir diverses valeurs de  $\mathbf{P}$ , physiquement équivalentes. La solution de ce paradoxe est que deux valeurs différentes de  $\mathbf{P}$  obtenues de cette façon diffèrent par un

vecteur constant  $\mathbf{P}_0$ . La charge liée au sein du diélectrique est indépendante de cette constante, alors que la charge liée à la surface du diélectrique provient des ions non appariés laissés pour compte par les deux définitions de  $\mathbf{P}$ . Ces ions non appariés ne sont pas les mêmes dans les deux définitions et la différence de densité superficielle  $\rho_s$  qui en résulte est précisément  $-\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{n}$ . Ainsi, la valeur précise de  $\mathbf{P}$  au sein d'un diélectrique n'a pas de sens physique absolu : c'est la variation de  $\mathbf{P}$  (dans l'espace et dans le temps) qui est importante. Bien sûr, si le milieu est linéaire, cette ambiguïté dans la définition de  $\mathbf{P}$  est levée par la relation  $\mathbf{P} \propto \mathbf{E}$ .

### 1.6.3 Induction électrique

Désignons par  $\rho$  la densité de charge *libre*, provenant de l'extérieur, non liée au diélectrique. Alors  $\rho + \rho'$  est la densité totale de charge et la loi de Gauss s'écrit  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi(\rho + \rho')$  ou  $\nabla \cdot (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\rho$ . On définit alors le vecteur d'induction électrique comme

$$\boxed{\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}} \quad (1.149)$$

en fonction duquel la loi de Gauss s'écrit maintenant

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho} \quad (1.150)$$

L'utilité du champ  $\mathbf{D}$  provient de ce que ses sources sont les charges libres, en principe contrôlées par l'observateur, et non les charges liées au diélectrique.

### 1.6.4 Constante diélectrique

Dans un milieu linéaire et isotrope, la polarisation induite est proportionnelle au champ appliqué :

$$\boxed{\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}} \quad \boxed{\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}} \quad (\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e) \quad (1.151)$$

Les constantes  $\chi_e$  et  $\varepsilon$  s'appellent respectivement *susceptibilité électrique* et *constante diélectrique*. Voici les valeurs de  $\varepsilon$  dans quelques milieux à fréquence nulle :

1. air : 1.00054
2. hélium : 1.000068
3. eau :  $\sim 80$

#### Remarques

1. La relation linéaire entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$  dépend de la fréquence. La constante diélectrique  $\varepsilon(\omega)$  dépend alors de la fréquence. En électrostatique, on s'intéresse bien sûr aux fréquences nulles.
2. Dans les milieux linéaires mais anisotropes, la relation entre  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{E}$  s'effectue par un tenseur de susceptibilité  $\chi_{ij}$  :

$$P_i = \chi_{ij} E_j \quad (1.152)$$

3. Il existe aussi des milieux non linéaires, dans lesquels un terme quadratique relativement important s'ajoute au terme linéaire. Les conséquences sont importantes dans certaines techniques optiques (fibres optiques).

4. Dans un milieu linéaire et isotrope, la relation entre les charges libre et liée est aussi linéaire :

$$\rho' = -\chi_e \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\chi_e}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \rho \quad (1.153)$$

En appelant  $\rho_{\text{tot.}}$  la densité de charge totale (libre + liée) on obtient

$$\rho_{\text{tot.}} = \rho + \rho' = \frac{1}{\varepsilon} \rho \quad (1.154)$$

### 1.6.5 Conditions de continuité pour $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$

A l'interface de deux milieux diélectriques 1 et 2 avec normale  $\mathbf{n}$  de 1 vers 2, on a les conditions aux limites

$$\boxed{(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = 4\pi\rho_s} \quad \boxed{(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \wedge \mathbf{n} = 0} \quad (1.155)$$

où  $\rho_s$  est la densité superficielle de charge libre. En d'autres mots, la composante de  $\mathbf{D}$  perpendiculaire à l'interface est discontinue par la densité superficielle de charge *libre*, alors que la composante de  $\mathbf{E}$  parallèle à l'interface est continue. Si aucune charge libre n'est présente dans le système, alors la composante normale de  $\mathbf{D}$  est continue. Dans des milieux linéaires et isotropes, cela revient à dire que la composante normale de  $\mathbf{E}$  est discontinue et sa composante parallèle continue.

Justifions maintenant la première de ces conditions aux limites. Pour ce faire, considérons encore une fois une surface abstraite de type 'boîte à pilule' à cheval sur l'interface, et intégrons la relation  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$  dans cette surface. Le théorème de la divergence donne

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} \mathcal{A} = 4\pi\rho_s \mathcal{A} \quad (1.156)$$

(ici  $\mathcal{A}$  est l'aire de la surface d'intégration) ce qui est bien la condition ci-haut. Pour justifier la deuxième condition, on considère plutôt une boucle d'intégration rectangulaire, infiniment étroite et qui longe l'interface de part et d'autre. Soit  $\hat{\mathbf{m}}$  la normale à cette boucle. Le vecteur qui décrit le côté long de la boucle est de longueur  $l$  et parallèle à  $\hat{\mathbf{m}} \wedge \mathbf{n}$ . Intégrons à travers cette boucle le flux de  $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$ . On trouve, avec le théorème de Stokes :

$$0 = l(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot (\hat{\mathbf{m}} \wedge \mathbf{n}) = l\hat{\mathbf{m}} \cdot (\mathbf{n} \wedge (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)) \quad (1.157)$$

Comme cette relation est vraie pour n'importe laquelle orientation du contour (pourvu qu'il soit dans le plan) ou encore pour n'importe laquelle valeur de  $\hat{\mathbf{m}}$ , on en déduit que  $\mathbf{n} \wedge (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$ , la deuxième des relations ci-haut.

---

#### Exemple 1.8: Sphère diélectrique dans un champ uniforme

Une sphère diélectrique (constante diélectrique  $\varepsilon_1$ ) est placée dans une champ uniforme, résidant dans un milieu de constante diélectrique  $\varepsilon_0$ . Trouver le potentiel autour de la sphère.

*Solution :* Écrivons le champ uniforme comme  $E_0 \hat{\mathbf{z}}$ . Comme  $\rho = 0$ , la densité totale  $\rho_{\text{tot.}}$  aussi est nulle et l'équation de Laplace pour  $\Phi$  est satisfaite partout, sauf sur la surface même de la sphère. Seules les conditions aux limites présentent des difficultés, comme dans le cas de la sphère conductrice de la p. 26.

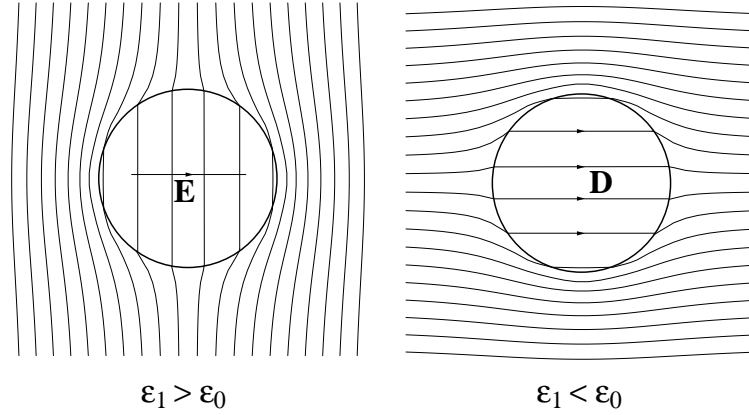


Figure 1.2. À gauche, on montre les équipotentiels à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère diélectrique quand  $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ . Les lignes du champ  $\mathbf{E}$  sont partout perpendiculaires aux équipotentiels. Il y a discontinuité de  $\mathbf{E}$  à l'interface, ce qui se traduit par un changement de pente des équipotentiels. À droite, on montre les lignes du champ  $\mathbf{D}$  quand  $\varepsilon_0 > \varepsilon_1$ . Dans les deux cas l'axe  $z$  est horizontal.

On sait que le potentiel à l'infini a la forme  $\Phi_0 = -E_0z = -E_0r \cos \theta$  ou encore  $\Phi_0 = -E_0rP_1(\cos \theta)$ . La forme générale du potentiel extérieur  $\Phi^{(ext.)}$  est

$$\Phi^{(ext.)}(\mathbf{r}) = \Phi_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (1.158)$$

A l'intérieur de la sphère, on a plutôt

$$\Phi^{(int.)}(\mathbf{r}) = \Phi_0 + \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (1.159)$$

On a séparé la contribution  $\Phi_0$  du champ externe de celle de la sphère. Cette dernière doit être finie quand  $r \rightarrow 0$  et nulle quand  $r \rightarrow \infty$ , ce qui justifie la forme employée. Il suffit dès lors de respecter les conditions aux limites.

1. Le potentiel doit être partout continu. Donc

$$A_l = B_l a^{-(2l+1)} \quad (1.160)$$

2. La composante radiale du champ sur la surface est alors

$$E_r^{(ext.)} = E_0 P_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) B_l a^{-l-2} P_l(\cos \theta) \quad (1.161)$$

$$E_r^{(int.)} = E_0 P_1(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{\infty} l A_l a^{l-1} P_l(\cos \theta) \quad (1.162)$$

La condition à respecter est  $\varepsilon_0 E_r^{(ext.)} = \varepsilon_1 E_r^{(int.)}$ . En égalisant les coefficients de  $P_l(\cos \theta)$  on obtient

$$\begin{aligned} B_0 &= 0 \\ \varepsilon_0(E_0 + 2B_1 a^{-3}) &= \varepsilon_1(E_0 - A_1) \\ \varepsilon_0((l+1)B_l a^{-l-2}) &= \varepsilon_1(-lA_l a^{l-1}) \quad (l > 1) \end{aligned} \quad (1.163)$$

En utilisant la condition (1) ci-haut, on obtient alors

$$A_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_0} E_0 \quad B_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_0} a^3 E_0 \quad (\text{autres}=0) \quad (1.164)$$

La solution complète est alors

$$\Phi^{(ext.)}(\mathbf{r}) = \Phi_0 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_0} \frac{a^3 E_0 \cos \theta}{r^2} \quad (1.165)$$

$$\Phi^{(int.)}(\mathbf{r}) = \frac{-3\varepsilon_0}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_0} E_0 z \quad (1.166)$$

Le champ à l'intérieur est donc uniforme :

$$\mathbf{E}^{(int.)} = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_0} E_0 \hat{\mathbf{z}} \quad (1.167)$$

Ce résultat est illustré à la Fig. 1.2.

### Remarques

1. Si  $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$  alors  $E^{(int.)} < E_0$ : la polarisation induite à l'intérieur tend à compenser le champ. Par contre  $\mathbf{D}$  est plus intense à l'intérieur qu'à l'extérieur : les lignes de  $\mathbf{D}$  sont continues.
2. Si  $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$  alors  $E^{(int.)} > E_0$ .
3. le potentiel à l'extérieur est  $\Phi_0$  plus le potentiel d'un dipôle d'intensité (si  $\varepsilon_0 = 1$ )

$$|\mathbf{d}| = \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1 + 2} a^3 E_0 \quad (1.168)$$

Ceci est exactement le module de  $\mathbf{P}$  multiplié par le volume de la sphère.

## 1.6.6 Énergie électrostatique et calcul des forces électriques

La densité d'énergie électrostatique dans un diélectrique doit être calculée en tenant compte du fait que la charge liée ne peut pas être assemblée en provenance de l'infini. Considérons plutôt la variation de l'énergie causée par une variation de la charge libre :

$$\delta U = \int d^3r \Phi(\mathbf{r}) \delta \rho(\mathbf{r}) \quad (1.169)$$

mais  $\delta \rho(\mathbf{r}) = \nabla \cdot (\delta \mathbf{D}) / 4\pi$  et donc

$$\delta U = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \Phi(\mathbf{r}) \nabla \cdot (\delta \mathbf{D}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} \quad (1.170)$$

Dans un milieu linéaire isotrope, ceci, après intégration, mène simplement à

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \int d^3r \mathbf{E}^2 \quad (1.171)$$

Comme  $\varepsilon > 1$ , l'énergie à  $\mathbf{E}$  fixe est plus élevée dans un diélectrique.

Une connaissance de l'énergie électrostatique d'un système nous permet de calculer la force exercée sur un conducteur ou un diélectrique en utilisant le principe du travail virtuel. Supposons qu'un ensemble de conducteurs, séparés par un ou plusieurs milieux diélectriques, comporte une partie mobile libre de se déplacer et dont la position est donnée par une coordonnée généralisée  $x$ . Par exemple,  $x$  pourrait être la position d'un conducteur ou la position de l'interface entre deux milieux diélectriques (on pense ici à la position d'un bloc de matière diélectrique libre de se déplacer à l'intérieur d'un condensateur). L'énergie électrostatique  $U(x)$  dépend en général de ce paramètre. On s'intéresse ici à la force  $F$  que ressent l'objet libre de se déplacer. Pour déterminer cette force, on fait subir à l'objet un déplacement virtuel  $\delta x$ , compatible avec la conservation de l'énergie. Le travail effectué par la force  $F$  lors de ce déplacement virtuel est le *travail virtuel*  $\delta W$ :

$$\delta W = F \delta x \quad (1.172)$$

Si le système est isolé, ce travail ne peut être fourni que par l'énergie potentielle du système, qui doit diminuer si  $\delta W$  est positif :

$$\delta W = -\delta U = -\frac{\partial U}{\partial x} \delta x \quad (1.173)$$

Il s'ensuit que la force généralisée est

$$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_q \quad (1.174)$$

où l'indice  $q$  signifie que la force est calculée pour un système isolé, dans lequel la charge sur chacun des conducteurs est par conséquent constante.

La situation est différente si les conducteurs sont maintenus à un potentiel constant. Dans ce cas, le système n'est pas isolé puisqu'il est relié à une source quelconque de potentiel (une pile, ou un réservoir de charge à un potentiel fixe). Les sources de potentiel peuvent donc accomplir un travail  $\delta W_s$  sur le système et l'expression (1.173) doit être modifiée :

$$\delta W = -\delta U + \delta W_s \quad (1.175)$$

Si, au cours du déplacement virtuel, la charge  $q_a$  sur le conducteur  $a$  ( $a = 1, 2, \dots, N$ ) est changée de  $\delta q_a$  afin que ce conducteur soit maintenu à un potentiel  $\Phi_a$ , le travail  $\delta W_s$  effectué par les sources sur le système est

$$\delta W_s = \sum_a \delta q_a \Phi_a \quad (1.176)$$

On peut tenir compte de ce travail en définissant l'énergie électrique modifiée

$$\tilde{U} = U - \sum_a q_a \Phi_a \quad (1.177)$$

La variation  $\delta \tilde{U}$  à potentiel constant est précisément  $\delta U - \sum_a \delta q_a \Phi_a$  et la force ressentie par l'objet est alors

$$F = -\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}\right)_V \quad (1.178)$$

où l'indice  $V$  signifie que la force est calculée pour un système ouvert, dans lequel le potentiel sur chacun des conducteurs est constant.



La distinction qui existe entre  $U$  et  $\tilde{U}$  est la même qui existe en thermodynamique entre l'énergie interne  $U$  et l'énergie libre de Helmholtz  $F = U - TS$ :  $U$  est minimisé dans un système isolé, alors que c'est  $F$  qui est minimisé à l'équilibre dans un système non isolé, à température constante ( $T$  et  $S$  sont respectivement la température absolue et l'entropie). De même, à pression constante, c'est l'enthalpie  $G = F - PV$  qui est minimisée ( $P$  et  $V$  sont la pression et le volume respectivement).

Écrivons maintenant l'énergie électrostatique (1.171) sous une autre forme, en inversant le calcul qui a été fait pour aboutir à (1.171):

$$\begin{aligned} U &= -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \nabla\Phi \cdot \mathbf{D} \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int da \cdot \mathbf{D}\Phi + \frac{1}{8\pi} \int d^3r \Phi \nabla \cdot \mathbf{D} \end{aligned} \quad (1.179)$$

Dans la première équation, on intègre sur tout le volume des diélectriques, qui est limité par les surfaces conductrices. En intégrant par parties, on obtient la deuxième équation, où la normale de l'intégrale de surface est extérieure au diélectrique, c'est-à-dire intérieure aux conducteurs. Le deuxième terme du membre de droite d'annule car, par hypothèse, il n'y a pas de charge libre à l'intérieur du diélectrique. Le premier terme est intégré sur les surfaces de tous les conducteurs en présence et, en inversant le signe de l'élément de surface, donne simplement la charge  $q_a$  sur le conducteur  $a$  fois le potentiel  $\Phi_a$ , qui est constant sur chaque conducteur. Plus précisément,

$$U = \frac{1}{2} \sum_a q_a \Phi_a \quad (1.180)$$

Par conséquent,

$$\tilde{U} = U - \sum_a q_a \Phi_a = -\frac{1}{2} \sum_a q_a \Phi_a = -U \quad (1.181)$$

On peut donc exprimer la force ressentie par un objet comme

$$F = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_V \quad (1.182)$$

**Exemple 1.9:** Force sur un bloc diélectrique dans un condensateur

Un condensateur à plaques parallèles possède une largeur  $L$ , une longueur  $\ell$  et une distance interplaque  $d$ . On suppose que  $L, \ell \gg d$  et on néglige les effets de bord. Un bloc diélectrique de mêmes dimensions est partiellement inséré entre les plaques dans le sens de la longueur, jusqu'à une distance  $x$  du bord. Calculez la force électrique ressentie par le diélectrique, à potentiel constant et ensuite à charge constante.

*Solution :* L'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur est  $U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} Q^2 / C$ , où  $C$  est la capacité du condensateur et dépend de  $x$ ,  $V$  est la différence de potentiel entre les deux armatures et  $Q$  est la charge accumulée sur chaque armature. La force exercée sur le diélectrique est

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x} && (V \text{ constant}) \\ F &= -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial x} && (Q \text{ constant}) \end{aligned} \quad (1.183)$$

Comme  $Q = CV$ , on voit que la force est la même dans les deux cas. Il reste à calculer la capacité  $C$ . Pour cela, intégrons la densité d'énergie électrostatique  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} / 8\pi$  dans l'espace entre les plaques, en négligeant les

effets de bord. Comme  $E = V/d$  et que  $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$  dans la partie du condensateur remplie par le diélectrique, on trouve

$$U = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{V}{d} \right)^2 [\varepsilon Lxd + L(\ell - x)d] \quad (1.184)$$

En comparant avec  $U = \frac{1}{2}CV^2$ , on trouve

$$C = \frac{L}{4\pi d} [\ell + (\varepsilon - 1)x] \quad (1.185)$$

et donc

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{L}{4\pi d} (\varepsilon - 1) \quad F = \frac{V^2 L}{8\pi d} (\varepsilon - 1) > 0 \quad (1.186)$$

On constate que le diélectrique est attiré par le condensateur, qu'on se place à charge constante ou à potentiel constant.

## Appendice 1.A

### Notation indicielle

Cette section constitue une introduction à la notation indicielle souvent employée dans les calculs ou démonstrations de ces notes.

Un vecteur  $\mathbf{A}$  peut être représenté par ses composantes :  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ . On écrit la  $i^e$  composante  $A_i$ . En particulier, on emploie l'abréviation  $\partial_i$  pour le gradient :

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.187)$$

On emploie couramment la *convention de sommation*, qui stipule qu'on doit sommer sur les indices qui apparaissent en paires. Par exemple, on écrit

$$A_i B_i \quad \text{pour} \quad \sum_{i=1}^3 A_i B_i \quad (1.188)$$

ou on écrit

$$A_i A_i \partial_k \Phi B_k B_j \quad \text{pour} \quad B_j \sum_{i,k=1}^3 A_i A_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} B_k \quad (1.189)$$

Dans cette notation, l'indice sur lequel on somme (l'indice de sommation) est l'analogie d'une variable d'intégration : le symbole précis utilisé importe peu. Ainsi, on a  $A_i B_i = A_k B_k$ .

Le symbole de Kronecker  $\delta_{ij}$  est défini comme suit :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.190)$$

Il s'agit en fait des éléments de matrice de la matrice unité. On a donc  $\delta_{ij} A_j = A_i$  ou encore  $\partial_i x_j = \delta_{ij}$ .

Le symbole (ou tenseur) de Levi-Civita  $\varepsilon_{ijk}$  est défini comme suit en dimension 3:  $\varepsilon_{ijk} = 0$  sauf

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \quad \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1 \quad (1.191)$$

Ce symbole est donc complètement antisymétrique dans ses indices (ex.  $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$ ) et est invariant par permutations cycliques de ses indices ( $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki}$ ). Naturellement, il s'annule si deux des indices sont identiques. En dimension  $d$ , ce symbole comporte  $d$  indices et est défini de manière analogue. On a la propriété suivante :

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \quad (1.192)$$

Le produit vectoriel  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$  de deux vecteurs peut s'exprimer ainsi :

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k \quad (1.193)$$

où, bien sûr,  $j$  et  $k$  sont sommés. En particulier, le rotationnel d'un champ vectoriel est  $(\nabla \wedge \mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k$ .

Comme premier exemple, calculons en notation indicielle le double produit vectoriel  $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}))_i &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}A_jB_mC_n \\ &= (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})A_jB_mC_n \\ &= B_i(A_jC_j) - C_i(A_jB_j) \\ &= (\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}))_i \end{aligned} \quad (1.194)$$

Comme deuxième exemple, montrons comment la divergence d'un rotationnel s'annule :

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \partial_i(\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k) = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k \quad (1.195)$$

Comme  $\partial_i\partial_j$  est symétrique dans les indices  $i, j$  et que  $\varepsilon_{ijk}$  est antisymétrique dans les mêmes indices, la somme sur  $i$  et  $j$  doit nécessairement s'annuler. Par exemple, la contribution à la somme du terme  $i = 1$  et  $j = 2$  est l'opposée de celle de  $i = 2$  et  $j = 1$ .

## Appendice 1.B

### Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre sont essentiels à la formulation du développement multipolaire. Cette annexe est une introduction à ces fonctions spéciales particulièrement simples.

On peut définir les polynômes de Legendre par la fonction génératrice

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + x^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l P_l(t) \quad (1.196)$$

Les polynômes  $P_l(t)$  sont obtenus en effectuant correctement le développement binomial. Les premiers polynômes sont

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1 \\ P_1(t) &= t \\ P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \\ P_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) \end{aligned} \quad (1.197)$$

Une formule explicite peut être obtenue pour  $P_l$ :

$$P_l(t) = \frac{(2l-1)!!}{l!} \left[ t^l - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)} t^{l-2} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2l-3)(2l-1)} t^{l-4} + \cdots \right] \quad (1.198)$$

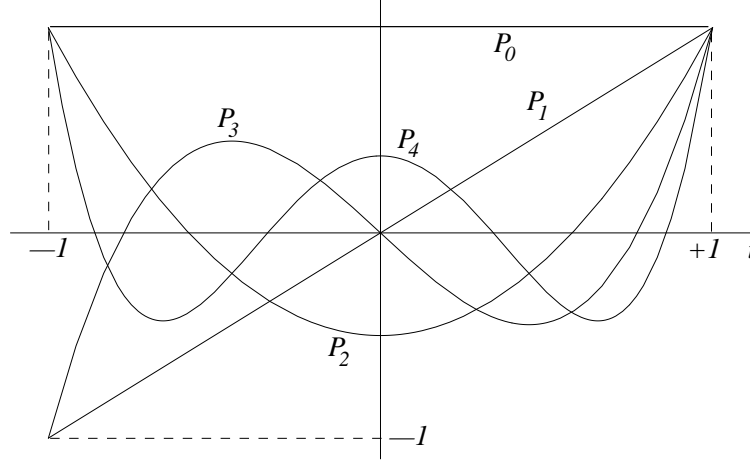


Figure 1.3. Graphique des premiers polynômes de Legendre

La définition (1.196) nous permet de démontrer plusieurs propriétés de ces polynômes. Premièrement, on peut effectuer la transformation  $x \rightarrow -x$  et  $t \rightarrow -t$  dans la fonction génératrice sans la modifier. On peut donc écrire

$$\sum_{l=0}^{\infty} (-x)^l P_l(-t) = \sum_{l=0}^{\infty} x^l P_l(t) \quad (1.199)$$

Ceci étant vrai pour toute valeur de  $x$  et de  $t$ , on en conclut que

$$P_l(-t) = (-1)^l P_l(t) \quad (1.200)$$

En d'autres termes, les polynômes d'ordre pair sont pairs et ceux d'ordre impair sont impairs.

Deuxièmement, on trouve facilement la valeur des polynômes à  $t = 1$ . Pour cette valeur, la fonction génératrice est

$$\begin{aligned} G(x, 1) &= \frac{1}{1-x} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} x^l \quad (\text{série géométrique}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} x^l P_l(1) \end{aligned} \quad (1.201)$$

Ceci étant vrai pour toute valeur de  $x$ , on conclut que

$$P_l(1) = 1 \quad \text{et} \quad P_l(-1) = (-1)^l \quad (1.202)$$

La série géométrique ne converge que si  $-1 < x < 1$ . La série (1.196) possède le même domaine de convergence.

En pratique, le calcul des polynômes de Legendre s'effectue à l'aide de relations de récurrence, comme celle-ci :

$$(2l + 1)tP_l(t) = (l + 1)P_{l+1}(t) + lP_{l-1}(t) \quad (1.203)$$

Cette relation permet de déterminer tous les polynômes de Legendre en connaissant les expressions pour  $P_0$  et  $P_1$ . Elle se démontre de la manière suivante : on calcule la dérivée de la fonction génératrice par rapport à  $x$ . On trouve que

$$(1 - 2xt + x^2) \frac{\partial G(x, t)}{\partial x} + (x - t)G(x, t) = 0 \quad (1.204)$$

Dans cette relation on substitue le développement en série (1.196) et on obtient une identité sous la forme d'un développement en série de puissances, puisque les facteurs  $(1 - 2xt + x^2)$  et  $x - t$  sont eux-mêmes des polynômes en  $x$  et  $t$ . En appliquant l'égalité pour chaque puissance de  $x$ , on trouve la relation (1.203).

On démontre aussi la formule suivante, dite *formule de Rodrigues*:

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dt^l} (t^2 - 1)^l \quad (1.205)$$

Cette formule se démontre par calcul direct, en comparant avec l'Éq. (1.198). Elle nous permet de démontrer la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_{-1}^1 dt P_m(t) P_n(t) = \delta_{mn} \frac{2}{2l + 1} \quad (1.206)$$

Il suffit pour cela d'appliquer la formule de Rodrigues dans l'intégrale et d'intégrer par parties complètement l'un des deux facteurs. La normalisation du cas  $m = n$  s'obtient plutôt en intégrant le carré de la formule (1.196) et en utilisant l'orthogonalité.

La dernière propriété des polynômes de Legendre que nous allons démontrer est que ce sont des solutions de l'équation différentielle de Legendre :

$$\frac{d}{dt} \left[ (1 - t^2) \frac{dP_l}{dt} \right] + l(l + 1)P_l = 0 \quad (1.207)$$

Pour démontrer ceci, considérons une charge unité située à la position  $\mathbf{r}'$  et considérons le potentiel électrique au point  $\mathbf{r}$  créé par cette charge :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.208)$$

Supposons que  $|\mathbf{r}'| < |\mathbf{r}|$  et choisissons nos axes de telle sorte que  $\mathbf{r}'$  soit sur l'axe des  $z$ . Définissons  $r = |\mathbf{r}|$  et  $r' = |\mathbf{r}'|$ . L'angle entre les vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  est la coordonnée angulaire  $\theta$  des coordonnées sphériques. Remplaçons cette coordonnée par  $t = \cos \theta$ . On peut alors utiliser la série (1.196) pour décrire le potentiel :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2tr'/r + (r'/r)^2}} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(t) \end{aligned} \quad (1.209)$$

D'un autre côté, si  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$  ce potentiel satisfait à l'équation de Laplace  $\nabla^2\Phi = 0$ . En coordonnées sphériques, le Laplacien a la forme suivante :

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \quad (1.210)$$

En raison de la symétrie azimutale du problème, le potentiel ne peut dépendre de  $\varphi$ . D'autre part, la substitution  $t = \cos\theta$  donne

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( (1-t^2) \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.211)$$

En substituant le développement (1.209) dans cette équation, on trouve

$$\sum_l \frac{r^l}{r^{l+1}} \left\{ l(l+1)P_l(t) + \frac{d}{dt} \left[ (1-t^2) \frac{dP_l}{dt} \right] \right\} = 0 \quad (1.212)$$

Comme il s'agit d'une identité, valable pour tout  $r > r'$  et pour toute valeur de  $t$ , on conclut que les polynômes de Legendre satisfont à l'équation différentielle (1.207). Les solutions de cette équation linéaire du deuxième ordre sont uniques si on spécifie deux conditions initiales ou deux conditions aux limites. Par exemple, les polynômes de Legendre sont les solutions uniques satisfaisant aux conditions  $P_l(1) = 1$  et  $P_l(-1) = (-1)^l$ .

## Problèmes

### Problème 1.1

Un disque de rayon  $a$  porte une densité superficielle de charge constante  $\rho_s$ . L'axe des  $z$  est perpendiculaire à ce disque et passe par son centre. Calculez le potentiel électrique  $\Phi(z)$  le long de l'axe des  $z$ . Calculez le champ électrique  $\mathbf{E}$  dans les deux limites  $z \gg a$  et  $z \ll a$  et montrez que les résultats obtenus sont ceux auxquels on doit s'attendre respectivement d'une charge ponctuelle et d'un plan infini.

### Problème 1.2

Une sphère isolante de rayon  $a$  porte une charge  $q$  répartie uniformément dans son volume. Cette sphère est entourée d'une enveloppe conductrice sphérique de rayon intérieur  $a$  et de rayon extérieur  $b > a$ . Trouvez le champ électrique et le potentiel  $\Phi$  partout et tracez leur profil en fonction de  $r$ .

### Problème 1.3

Considérez deux charges  $q_1$  et  $q_2$  situées respectivement à l'origine et à  $\mathbf{r} = (0, 0, a)$ . Soit  $\mathbf{E}$  le champ produit par ces deux charges. À partir de l'expression (1.40) pour la densité d'énergie  $\mathcal{E}$ , montrez que l'énergie d'interaction entre les deux charges est  $U = q_1 q_2 / a$ . Indice : écrivez  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ , où  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$  sont respectivement produits par les charges 1 et 2, et ne considérez dans la densité  $\mathcal{E}$  que le terme qui provient de la présence simultanée des deux charges.

### Problème 1.4

Soit une particule ponctuelle de charge  $q$  ayant une trajectoire  $\mathbf{r}(t)$ . La densité de courant et la densité de charge associées sont  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$  et  $\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$ . Démontrez explicitement que l'équation de continuité  $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$  est satisfaite.

**Problème 1.5**

Considérez l'expression  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$  pour la densité de courant. Démontrez explicitement que l'équation de continuité est satisfaite pour cette expression. Considérez pour cela une région  $V$ , délimité par une surface  $S$ . Si on suit le flot déterminé par la vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ , cette région est transportée en un temps  $\delta t$  en une autre région  $V'$  (de volume généralement différent). La charge totale à l'intérieur de cette région doit être inchangée. Le concept d'élément de volume en co-mouvement avec  $\mathbf{v}$  est ici utile.

**Problème 1.6**

Un filament chauffant émet des électrons en son extrémité, située à l'origine. On suppose que les électrons s'échappent de cette extrémité également dans toutes les directions et qu'ils forment un nuage électronique de densité de charge  $-\rho(r)$  autour de l'origine ( $\rho$  est positif). De plus, les électrons situés à une distance  $r$  de l'origine s'éloignent de celle-ci, en raison de la répulsion électrostatique des autres électrons, avec une vitesse  $v(r)$ . Plaçons-nous en situation de régime permanent, c'est-à-dire supposons que la densité  $\rho(r)$  et la vitesse  $v(r)$  ne dépendent pas du temps.

- a) Montrez que  $\rho(r)v(r) = I/(4\pi r^2)$ , où  $I$  est le courant émis par le filament, en valeur absolue.  
 b) Montrez que le potentiel électrique  $\Phi(r)$  satisfait à l'équation différentielle suivante :

$$2r\Phi' + r^2\Phi'' = I\sqrt{\frac{m}{2e\Phi}}$$

Indice : comme dans l'exemple 1.1 des notes, on suppose que l'Éq. (1.26) est valable (ceci fixe la valeur du potentiel à zéro à l'origine, en supposant que les électrons sont émis avec une vitesse négligeable).

**Problème 1.7**

Supposons que la loi de Coulomb est légèrement modifiée par un facteur exponentiel provenant d'une masse non nulle du photon, de sorte que le potentiel électrique produit par une particule de charge  $q$  située à l'origine est  $\Phi(\mathbf{r}) = qe^{-\mu r}/r$ , où  $\mu$  est une constante représentant l'inverse de la portée de l'interaction électromagnétique.

- a) Montrez que l'équation de Poisson pour le potentiel serait modifiée pour devenir l'équation de Helmholtz :

$$(\nabla^2 - \mu^2)\Phi = -4\pi\rho$$

Commencez par le démontrer pour une charge ponctuelle située à l'origine et généralisez le résultat en vous servant du principe de superposition.

- b) La masse du photon associée à la constante  $\mu$  est  $m = h\mu/c$ , où  $h$  est la constante de Planck et  $c$  la vitesse de la lumière. Sachant que la limite supérieure pour la masse du photon est de  $4.10^{-48}$ g, à quelle portée minimale  $\mu^{-1}$  cela correspond-il? Quelle est la signification pratique de cette distance?

**Problème 1.8**

Étant donné un ensemble de  $N$  conducteurs portés à des valeurs  $\Phi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) du potentiel électrostatique et supportant des charges  $Q_i$ , montrez, à partir de l'expression  $\mathbf{E}^2/8\pi$  pour la densité d'énergie électrostatique, que l'énergie  $U$  du système est minimisée quand le potentiel satisfait à l'équation de Laplace  $\nabla^2\Phi = 0$  dans les régions situées entre les conducteurs, et que cette valeur minimum est donnée par

$$U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \Phi_i \quad (1.213)$$

**Problème 1.9**

Étant donnés deux conducteurs portant des charges égales et opposées  $\pm Q$ , on définit la capacité comme le rapport  $Q/V$  où  $V$  est la différence de potentiel entre les deux conducteurs. Exprimer  $C$  en fonction des coefficients de capacité  $C_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ).

**Problème 1.10**

Soit deux plaques conductrices carrées de côté  $l$ , parallèles et séparées par une distance  $d$  telle que  $l \gg d$ .

a) Montrez que la capacité est  $C = l^2/4\pi d$ .

b) Si les plaques ne sont pas parfaitement parallèles, de telle façon que la distance entre les plaques soit  $d + \delta$  sur un bord et  $d - \delta$  sur l'autre bord, avec  $d \gg \delta$ , montrez que la capacité est modifiée de la manière suivante, au premier ordre en  $\delta$ :

$$C = \frac{l^2}{4\pi d} \left( 1 + \frac{\delta^2}{3d^2} \right) \quad (1.214)$$

**Problème 1.11**

Trois sphères conductrices identiques sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral. Si la première sphère est maintenue à un potentiel  $V$  et les deux autres à un potentiel nul, les charges sur les sphères sont respectivement  $q$ ,  $q'$  et  $q''$ . Montrez que si les trois sphères étaient à un potentiel commun  $W$ , chaque sphère porterait une charge  $(2q' + q)W/V$ . Calculez les potentiels des trois sphères quand les charges portées par les sphères sont respectivement  $Q$ , 0 et 0. Cette question est tirée de l'examen de l'A.C.P. (1993).

**Problème 1.12**

Calculer le moment quadrupolaire  $Q$  des distributions de charge suivantes (prenez l'origine au centre de l'objet):

- a) Une tige très mince de longueur  $l$ , chargée uniformément avec charge totale  $q$ .
- b) Un disque très mince de rayon  $r$ , chargé uniformément avec charge totale  $q$ .

**Problème 1.13**

Exprimez en fonction des moments  $Q_{ij}$  la contribution quadrupolaire au couple  $\mathbf{N}$  ressenti par une distribution de charge placée dans un champ électrique non uniforme.

**Problème 1.14**

Montrez que, dans le vide, la moyenne du potentiel  $\Phi$  sur la surface d'une sphère est égale au potentiel au centre de la sphère.

**Problème 1.15**

Étant donné un plan conducteur infini situé à  $z = 0$  et un dipôle ponctuel  $\mathbf{d} = p\hat{\mathbf{z}}$  situé à  $\mathbf{r} = (0, 0, a)$ , calculez la force ressentie par ce dipôle.

**Problème 1.16**

Une tige conductrice cylindrique de rayon  $a$  et de longueur quasi-infinie est placée parallèlement à l'axe des  $z$  dans un champ électrique uniforme qui lui est perpendiculaire ( $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{r}}$ ). Calculez le potentiel électrique en dehors de la tige. Exprimez la réponse en coordonnées cylindriques. Calculez aussi la densité superficielle de charge induite sur la surface de la tige.

**Problème 1.17**

Considérez maintenant deux tiges identiques, comme dans le problème précédent, parallèles l'une à l'autre et séparées par une distance  $d$ , telle que  $d \gg a$ . Les deux tiges sont encore placées dans un champ électrique uniforme qui leur est perpendiculaire, comme ci-haut. Calculez l'énergie d'interaction par unité de longueur des deux tiges (Supposez, en première approximation, que la présence de la première tige n'affecte pas la distribution de charge sur la deuxième tige et vice-versa. Limitez vos calculs au premier ordre non-trivial en  $a/d$ ). Montrez que la force par unité de longueur entre les deux tiges varie comme  $\sim 1/d^3$ .



**Problème 1.18**

Une sphère conductrice neutre est placée dans un champ électrique uniforme. Calculez la densité superficielle de charge  $\rho_s$  induite, partout sur la surface de la sphère.

**Problème 1.19**

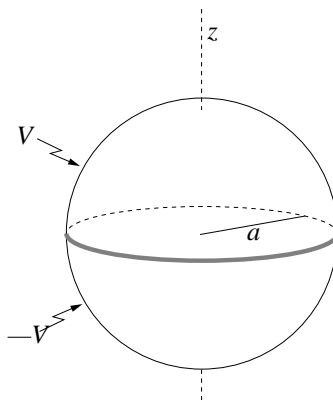
Une charge ponctuelle  $q$  est placée à l'intérieur d'une sphère conductrice neutre de rayon  $b$ , à une distance  $a$  du centre (voir l'exercice résolu ci-haut). Quelle est la force exercée sur cette charge en fonction de  $b$ ? Peut-on remplacer la charge induite sur la sphère par un ensemble d'images?

**Problème 1.20**

Une charge ponctuelle  $q$  est placée à l'extérieur d'une sphère conductrice neutre de rayon  $b$ , à une distance  $a$  du centre ( $a > b$ ). Trouver le potentiel  $\Phi$  partout à l'extérieur de la sphère. Quel est le moment dipolaire induit sur la sphère?

**Problème 1.21**

Une coquille conductrice de rayon  $a$  est sciée en deux hémisphères qui sont ensuite réunis par un joint isolant d'épaisseur négligeable à l'équateur. Les hémisphères nord et sud sont maintenus respectivement à des potentiels  $+V$  et  $-V$ . Utilisez les coordonnées sphériques où l'axe des  $z$  coïncide avec l'axe polaire de la sphère. Exprimez le potentiel  $\Phi(\mathbf{r})$  partout à l'intérieur et à l'extérieur de la coquille, comme une série en polynômes de Legendre. Indiquez lesquels parmi les coefficients sont nuls et calculez les 2 premiers coefficients non nuls.

**Problème 1.22**

En démontrant l'équation (1.86) pour la force exercée sur une distribution de charge, pourquoi néglige-t-on l'effet du champ électrique créé par la distribution elle-même?

**Problème 1.23**

On veut ici démontrer rigoureusement que le potentiel à l'extérieur d'une sphère conductrice creuse de rayon  $a$  contenant une charge  $q$  est  $\Phi = q/r$ , quelle que soit la façon dont cette charge est répartie à l'intérieur de la sphère. À cette fin, nous allons procéder à une inversion de l'espace, c.-à-d. à une transformation conforme qui transforme tout point à l'intérieur de la sphère en un point à l'extérieur et vice-versa.

a) Considérez la transformation  $\mathbf{r} \rightarrow (a^2/r^2)\mathbf{r}$  ou, en coordonnées sphériques,  $(r, \theta, \varphi) \rightarrow (a^2/r, \theta, \varphi)$ . Définissons un potentiel transformé

$$\Phi'(r, \theta, \varphi) = r^\alpha \Phi(a^2/r, \theta, \varphi)$$

Démontrez que si  $\Phi$  satisfait à l'équation de Laplace, alors  $\Phi'$  aussi, pourvu que l'exposant  $\alpha$  soit bien choisi. Quelle est la valeur de  $\alpha$  appropriée?

b) À l'aide de cette transformation, montrez comment la solution  $\Phi(r, \theta, \varphi) = q/r$  à l'extérieur de la sphère conductrice se démontre à partir de la solution  $\Phi'(r, \theta, \varphi) = \text{const.}$  à l'intérieur d'une sphère conductrice ne contenant aucune charge.

c) Refaites la partie (a), cette fois en dimension 2, en coordonnées polaires planes. Quelle est la valeur de  $\alpha$  cette fois-ci?

### Problème 1.24

Montrez que le champ électrique à l'intérieur d'une sphère uniformément polarisée est uniforme et donné par  $\mathbf{E} = -(4\pi/3)\mathbf{P}$ . Montrez ensuite que le champ électrique  $\mathbf{E}_s$  existant dans une cavité sphérique au sein d'un milieu diélectrique uniformément polarisé est relié au champ  $\mathbf{E}$  dans le milieu par

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P} \quad (1.215)$$

Indice : considérez deux sphères chargées uniformément (avec des charges égales mais opposées) superposées avec un déplacement relatif.

### Problème 1.25

Considérez une coquille sphérique de rayon intérieur  $a$  et de rayon extérieur  $b$  ( $b > a$ ). Cette coquille est faite d'un matériau diélectrique linéaire de constante  $\varepsilon$  et est plongée dans un champ électrique externe uniforme  $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{z}}$ . Le milieu à l'extérieur et à l'intérieur de la coquille est de constante diélectrique  $\varepsilon = 1$ . Calculez  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{P}$  partout.

### Problème 1.26

Un condensateur est formé de deux cylindres métalliques concentriques de rayons  $a$  et  $b$  respectivement ( $b > a$ ). On peut utiliser un tel condensateur pour mesurer la susceptibilité électrique d'un liquide, comme suit. On applique une différence de potentiel  $V$  constante aux bornes de ce condensateur (c.-à-d. entre les deux cylindres) et on le plonge dans le liquide. Dans le but de minimiser l'énergie totale du système, sous la contrainte que le potentiel est constant, une certaine quantité de liquide diélectrique monte entre les cylindres et forme une colonne de hauteur  $h$  (voir figure). La hauteur de la colonne est déterminée en équilibrant les forces électriques et gravitationnelles.

a) À l'aide de la loi de Gauss, montrez que le champ électrique entre les cylindres est relié à la différence de potentiel de la manière suivante :

$$E = \frac{V}{r \ln(b/a)}$$

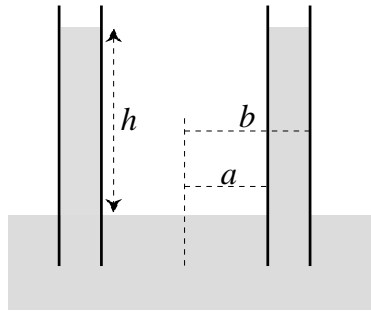
( $r$  est la coordonnée cylindrique radiale).

b) Montrez que l'énergie électrique du condensateur, par rapport à l'énergie qu'il aurait en l'absence de cette colonne de liquide, est

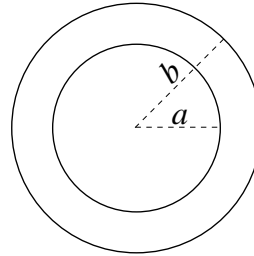
$$U_E(h) = \frac{\pi\chi_e h V^2}{\ln(b/a)}$$

où  $\chi_e$  est la susceptibilité électrique. À partir de cette expression, trouvez la force verticale exercée sur la colonne de liquide, en n'oubliant pas que la différence de potentiel  $V$  est constante.

c) Quelle est la force gravitationnelle s'exerçant sur la colonne de liquide? Obtenez une expression pour la susceptibilité  $\chi_e$  en équilibrant les forces gravitationnelle et électrique.



vue en coupe verticale



vue en coupe horizontale

# Magnétostatique

Le magnétisme s'est manifesté premièrement par le ferromagnétisme, c'est-à-dire par les dipôles magnétiques permanents résidant dans des substances comme la magnétite, un minéral associé à la ville de Magnésie, en Asie Mineure. À la différence de l'électricité, les charges magnétiques (monopôles) sont inexistantes<sup>1</sup>. Cependant, les forces magnétiques peuvent être produites non seulement par des aimants naturels, mais aussi par des courants électriques : c'est la découverte cruciale d'Oersted (1819). La magnétostatique s'intéresse au phénomènes magnétiques produits par un mouvement de charges indépendant du temps (courants stationnaires). Les charges isolées en mouvement ne peuvent pas être la source de champs magnétiques statiques.

## 2.1 Loi d'Ampère

### 2.1.1 Loi de Biot et Savart

Deux fils conducteurs dans lesquels circulent des courants  $I_1$  et  $I_2$  subissent une force mutuelle proportionnelle au produit des courants, attractive si les courants sont parallèles et répulsive s'ils sont antiparallèles. Si on considère des éléments de circuit  $d\mathbf{l}_1$  et  $d\mathbf{l}_2$  situés à  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ , la force mutuelle (sur  $d\mathbf{l}_1$  par  $d\mathbf{l}_2$ ) est

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{d\mathbf{l}_1 \wedge (d\mathbf{l}_2 \wedge \hat{\mathbf{r}}_{12})}{r_{12}^2} \quad (2.1)$$

1. Étant donné les unités utilisées pour la charge et fixées par la forme que nous avons choisi pour la loi de Coulomb, la constante de proportionnalité  $c$  a les dimensions (unités) de la vitesse. D'après les mesures expérimentales elle coïncide avec la vitesse de la lumière dans le vide<sup>2</sup>:

$$c = 2.99792 \dots \times 10^{10} \text{ cm/s}$$

2. La ressemblance avec la loi de Coulomb est frappante. Cependant les éléments de circuits n'existent pas de façon isolée! Pour deux circuits fermés, la force totale diminue plus rapidement avec la distance. Cette force est alors une double intégrale le long des circuits :

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_1 \wedge (d\mathbf{l}_2 \wedge \hat{\mathbf{r}}_{12})}{r_{12}^2}$$

---

<sup>1</sup> la porte n'est pas irrémédiablement fermée, mais ces monopôles seraient alors de rares accidents issus de l'univers primordial et très massifs.

<sup>2</sup> Sans même avoir touché à l'électrodynamique, il est dès lors manifeste que la lumière est probablement un phénomène électromagnétique. Ce fait échappa cependant longtemps aux pionniers de l'électromagnétisme, en raison sans doute des systèmes d'unités boiteux alors en usage!

Cependant,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{l}_1 \wedge (d\mathbf{l}_2 \wedge \hat{\mathbf{r}}_{12})}{r_{12}^2} &= \frac{d\mathbf{l}_2(d\mathbf{l}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_{12})}{r_{12}^2} - \frac{\hat{\mathbf{r}}_{12}(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)}{r_{12}^2} \\ &= -d\mathbf{l}_2(d\mathbf{l}_1 \cdot \nabla(1/r_{12})) - \frac{\hat{\mathbf{r}}_{12}(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)}{r_{12}^2} \end{aligned}$$

L'intégrale du premier terme est nulle, car la circulation d'un gradient sur un contour fermé s'annule. On peut donc écrire

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}$$

Comme pour l'électrostatique, on peut introduire un concept intermédiaire dans l'interaction des deux éléments de circuit : l'*induction magnétique*  $\mathbf{B}$  (identique au *champ magnétique* dans le vide):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_1) = \frac{I_2}{c} \oint \frac{d\mathbf{l}_2 \wedge \hat{\mathbf{r}}_{12}}{r_{12}^2} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{I_1}{c} \oint d\mathbf{l}_1 \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}_1) \quad (2.3)$$

La formule (2.2) est la loi de *Biot* et *Savart*, quoique due à Ampère dans sa généralité. Notons que, dans le système CGS, les unités de l'induction magnétique sont les mêmes que celles du champ électrique.<sup>3</sup>

On peut généraliser la loi de Biot-Savart telle qu'énoncée plus haut à une configuration arbitraire de densité de courant  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ .

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{J}_1(\mathbf{r}') \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int d^3r \mathbf{J}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{F}$  est la force *totale* exercée sur la distribution de courant  $\mathbf{J}_2$  par le champ magnétique  $\mathbf{B}$  créé par une autre distribution de courant  $\mathbf{J}_1$ . Il est entendu que les distributions de courant  $\mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$  obéissent à la version stationnaire de l'équation de continuité:  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ . Cette généralisation provient du fait qu'on peut toujours considérer une distribution de courant sans divergence comme une assemblée continue de circuits : considérons les lignes de champ d'une distribution  $\mathbf{J}$ , c'est-à-dire l'ensemble des courbes auxquelles  $\mathbf{J}$  est tangent en chaque point. Ces courbes sont fermées du fait que  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ . En prenant un ensemble de telles courbes proches les unes des autres (un faisceau de section  $da$ ) on obtient l'équivalent d'un circuit fermé dans lequel circule un courant  $dI = |\mathbf{J}|da$ . On peut donc remplacer l'intégrale de chemin sur un circuit par une intégrale de volume :

$$I \int_C d\mathbf{l}(\dots) \longrightarrow \int d^3r \mathbf{J}(\dots) \quad (2.6)$$

<sup>3</sup> La convention arbitraire pour le sens du produit vectoriel affecte le signe de  $\mathbf{B}$ , mais non le résultat physique (la force), car cette convention est appliquée deux fois en succession.

### 2.1.2 Potentiel vecteur

Il est clair selon (2.4) que le champ magnétique peut s'écrire ainsi :

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}} \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{A}$  est le *potentiel vecteur*:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.8)$$

Ceci se vérifie aisément puisque

$$\nabla \wedge (\mathbf{J}f(\mathbf{r})) = \nabla f \wedge \mathbf{J} \quad (2.9)$$

si  $\mathbf{J}$  ne dépend pas de  $\mathbf{r}$ .

L'expression ci-haut pour  $\mathbf{A}$  n'est pas unique, car on peut ajouter à  $\mathbf{A}$  le gradient d'une fonction sans que  $\mathbf{B}$  ne soit modifié, puisque  $\nabla \wedge \nabla f = 0$ .

Étant donné que la divergence d'un rotationnel est nulle, on peut écrire

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \quad (2.10)$$

Cette équation est l'une des équations fondamentales de l'électromagnétisme, et conserve sa validité même dans les situations où les courants dépendent du temps. En analogie avec l'électrostatique et la loi de Gauss, cette équation signifie qu'il n'existe pas de *charge magnétique*, ou, autrement dit, de *monopôles magnétiques*. Les lignes de champ de  $\mathbf{B}$  sont donc toujours fermées, contrairement à  $\mathbf{E}$  qui voit ses lignes de champ sortir des charges ou entrer dans les charges.

### 2.1.3 Loi d'Ampère

La loi d'Ampère est à la magnétostatique ce que la loi de Gauss est à l'électrostatique. Elle stipule que la circulation de  $\mathbf{B}$  le long d'un contour fermé est proportionnel au courant passant à travers ce contour :

$$\oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \int_S d\mathbf{a} \cdot \mathbf{J} = \frac{4\pi}{c} I[C] \quad (2.11)$$

La forme différentielle de la loi d'Ampère s'obtient en utilisant le théorème de Stokes :

$$\boxed{\nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}} \quad (2.12)$$

Comme pour la loi de Gauss avec la loi de Coulomb, on peut démontrer la loi d'Ampère à partir de celle de Biot et Savart. On écrit tout d'abord

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2.13)$$

1. La quantité  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  s'annule puisque la densité de courant  $\mathbf{J}$  est stationnaire (par hypothèse):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{1}{c} \int d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (2.14)$$

( $\nabla'$  est le gradient par rapport à  $\mathbf{r}'$ ). En passant de la deuxième à la troisième équation, nous avons procédé à une intégration par partie dont le terme de surface s'annule, puisque par hypothèse la distribution de courant tend vers zéro suffisamment rapidement à l'infini. Cette expression est nulle puisque  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ .

2. La similitude entre (2.8) (composante par composante) et l'expression correspondante pour le potentiel électrostatique [éq. (1.17)] nous mène à l'équation de Poisson pour le potentiel vecteur :

$$\nabla^2 A_i = -\frac{4\pi}{c} J_i \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (2.15)$$

La loi d'Ampère est donc démontrée par ces deux remarques.

**Exemple 2.1:** Induction magnétique dans un fil conducteur.

Un long fil métallique de section circulaire et de rayon  $a$  porte un courant  $I$  uniformément distribué dans la section du fil. Calculez l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  partout.

*Solution :* Adoptons les coordonnées cylindriques, avec l'axe du fil comme axe  $z$ . Pour des raisons de symétrie, le champ magnétique est donné par  $\mathbf{B} = B(r)\hat{\phi}$ . Considérons un contour de rayon  $r$  et appliquons la loi d'Ampère. Si  $r > a$ , le courant traversant la boucle est  $I$  et on trouve

$$2\pi r B(r) = \frac{4\pi I}{c} \quad \implies \quad B(r) = \frac{2I}{cr} \quad (r > a) \quad (2.16)$$

Si, au contraire,  $r < a$ , le courant traversant la boucle est  $I(r) = I r^2/a^2$  et l'induction magnétique est alors

$$B(r) = \frac{2Ir}{ca^2} \quad (r < a) \quad (2.17)$$

On peut aussi résoudre ce problème à l'aide du potentiel vecteur, par analogie avec une situation électrostatique. Si nous avons un cylindre infini uniformément chargé (charge électrique par unité de longueur  $\rho_l$ ), alors le théorème de Gauss nous permettrait d'obtenir l'expression suivante pour le potentiel électrique :

$$\Phi(r) = \begin{cases} -2\rho_l \ln(r/a) & (r > a) \\ -\rho_l \frac{r^2 - a^2}{a^2} & (r < a) \end{cases} \quad (2.18)$$

où nous avons ajusté les constantes afin que  $\Phi$  soit continu et nul à  $r = a$ . La similitude entre les éq. (2.15) et (1.18) nous permet de traduire ce résultat en magnétostatique. L'équivalent de  $\rho_l$  est ici  $I/c$  et le potentiel vecteur créé par ce courant est alors

$$\mathbf{A}(r) = \begin{cases} -\frac{2I}{c} \ln(r/a) \hat{\mathbf{z}} & (r > a) \\ -\frac{I}{c} \frac{r^2 - a^2}{a^2} \hat{\mathbf{z}} & (r < a) \end{cases} \quad (2.19)$$

Le champ magnétique est alors

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} = -\hat{\phi} \frac{\partial A_z}{\partial r} \quad (2.20)$$

On retrouve alors la solution donnée plus haut.

## 2.2 Mouvement dans des champs électrique et magnétique

### 2.2.1 Force de Lorentz

Considérons maintenant une distribution de courant faite de charges ponctuelles en mouvement. La densité de courant est alors donnée par l'éq. (1.49):

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (2.21)$$

En substituant cette expression dans la relation (2.5) pour la force ressentie par la distribution, on trouve

$$\mathbf{F} = \sum_i \frac{q_i}{c} \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}_i) \quad (2.22)$$

Il s'agit en fait d'un résultat qui va au-delà de l'équation (2.5), car il est valide même quand le champ magnétique est non-stationnaire. Il est en effet difficile d'imaginer que la force exercée sur une seule charge par un champ magnétique puisse dépendre de la présence des autres charges dans la distribution de courant. On conclut donc que la force électromagnétique totale exercée sur une charge ponctuelle en mouvement est

$$\boxed{\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B}} \quad (2.23)$$

On l'appelle la *force de Lorentz*.

### 2.2.2 Formulations Lagrangienne et Hamiltonienne

La force de Lorentz peut être incorporée dans le formalisme lagrangien de la mécanique. Dans ce cas cependant, le lagrangien  $L$  a une forme inhabituelle :

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - q\Phi(\mathbf{r}) + \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} \quad (2.24)$$

Pour établir que ce lagrangien est bien adéquat, il suffit de démontrer que les équations de Lagrange coïncident avec la formule (2.23) ci-haut. Les équations de Lagrange sont

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} &= 0 \\ &= \frac{d}{dt} \left[ m\mathbf{v} + \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right] + q\nabla\Phi - \frac{q}{c} \nabla(A_i(\mathbf{r})v_i) \\ &= m\mathbf{a} + \frac{q}{c} \partial_i \mathbf{A} \frac{dx_i}{dt} - q\mathbf{E} - \frac{q}{c} \nabla(A_i(\mathbf{r})v_i) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Remarquons que

$$\partial_i \mathbf{A} v_i - \nabla(A_i(\mathbf{r})v_i) = -\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (2.26)$$

La force de Lorentz (2.23) s'ensuit immédiatement.

Passons maintenant à l'hamiltonien. Le moment conjugué  $\mathbf{p}$  est

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (2.27)$$



L'hamiltonien est alors

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L(\mathbf{v}, \mathbf{r}) \\ &= m\mathbf{v}^2 + \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} - L(\mathbf{v}, \mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + q\Phi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

On constate qu'il s'agit simplement de la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle électrique : le potentiel vecteur ne contribue pas à l'énergie. Ceci est normal car, la force magnétique étant toujours perpendiculaire à la vitesse, elle ne peut modifier l'énergie cinétique de la particule. Cependant, l'hamiltonien doit être exprimé en fonction de  $\mathbf{p}$  et non de  $\mathbf{v}$ . On écrit donc

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 + q\Phi(\mathbf{r}) \quad (2.29)$$

Cette expression pour l'hamiltonien se transpose directement en mécanique quantique.

## 2.3 Dipôles magnétiques

### 2.3.1 Moment dipolaire

On peut appliquer à l'expression (2.8) pour  $\mathbf{A}$  le même développement multipolaire que pour le potentiel électrostatique :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') r'^l P_l(\cos \gamma) \quad (2.30)$$

Le premier terme (monopôle) s'annule :

$$\mathbf{A}^{(1)} = \frac{1}{cr} \int d^3r \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.31)$$

En effet,

$$\int d^3r J_k(\mathbf{r}) = \int d^3r J_i \partial_i x_k = - \int d^3r \partial_i J_i x_k = 0 \quad (2.32)$$

puisque  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ .

Le deuxième terme (le dipôle) est

$$A_k^{(2)} = \frac{1}{cr^2} \int d^3r' J_k(\mathbf{r}') r' \cos \gamma = \frac{1}{cr^3} \int d^3r' J_k(\mathbf{r}') x'_i x_i \quad (2.33)$$

Notons en passant que

$$\partial_m (x_i x_k J_m) = x_k J_i + x_i J_k \quad (2.34)$$

Le membre de gauche est une divergence et donc on obtient, en intégrant,

$$\int d^3r' (x'_i J_k + x'_k J_i) = 0 \quad (2.35)$$

On peut alors remplacer

$$\int d^3r' x'_i J_k(\mathbf{r}') \quad \text{par} \quad \frac{1}{2} \int d^3r' (x'_i J_k(\mathbf{r}') - x'_k J_i(\mathbf{r}')) \quad (2.36)$$

Le potentiel dipolaire devient alors

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{(2)} &= \frac{1}{2cr^3} \int d^3r' [(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})\mathbf{J}(\mathbf{r}') - \mathbf{r}'(\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{r})] \\ &= -\frac{1}{2cr^3} \left[ \mathbf{r} \wedge \int d^3r' \mathbf{r}' \wedge \mathbf{J} \right]\end{aligned}\quad (2.37)$$

On définit alors l'*aimantation*  $\mathbf{M}$  comme

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2c} \mathbf{r} \wedge \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (2.38)$$

et le *moment dipolaire magnétique*  $\mathbf{m}$  comme

$$\mathbf{m} = \int d^3r \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2c} \int d^3r \mathbf{r} \wedge \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (2.39)$$

Le terme dipolaire du potentiel vecteur devient

$$\mathbf{A}^{(2)} = \frac{\mathbf{m} \wedge \mathbf{r}}{r^3} \quad (2.40)$$

L'induction magnétique correspondante se calcule simplement :

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{r}) &= \nabla \wedge \left( \mathbf{m} \wedge \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \\ &= \mathbf{m} \left( \nabla \wedge \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3}\end{aligned}\quad (2.41)$$

Le premier terme s'annule sauf à l'origine (il s'agit de la divergence du champ électrique d'une charge ponctuelle) et l'origine est ici exclue du domaine d'observation (nous nous situons loin des sources). Le deuxième terme peut être développé comme suit, en notation indicielle :

$$\begin{aligned}B_i^{(2)} &= -m_j \partial_j \left( \frac{x_i}{r^3} \right) \\ &= -m_j (\partial_j x_i) \frac{1}{r^3} + 3m_j x_i \frac{x_j}{r^5} \\ &= \frac{1}{r^3} (-m_i + 3n_i n_j m_j)\end{aligned}\quad (2.42)$$

où  $n_i \equiv x_i/r$  est le vecteur unité dans la direction de  $\mathbf{r}$ . En notation vectorielle, ceci devient

$$\mathbf{B}^{(2)} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{r^3} \quad (2.43)$$

Remarques :

1. La forme du champ est la même que pour un dipôle électrique.
2. Les unités du moment dipolaire magnétique sont les mêmes que celles du moment dipolaire électrique. Le facteur de  $1/c$  a comme conséquence que le moment dipolaire magnétique typique sera beaucoup plus petit que son analogue électrique, à moins que les vitesses typiques de la distribution de courant soient voisines de  $c$ .

3. Cette forme est valide loin des sources et constitue le terme dominant dans le développement multipolaire magnétique. Une approximation supplémentaire consiste à ajouter un terme à l'origine des coordonnées qui assure que l'intégrale du champ  $\int d^3r \mathbf{B}$  soit reproduite correctement :

$$\mathbf{B} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{r^3} + \frac{8\pi}{3} \mathbf{m} \delta(\mathbf{r}) \quad (2.44)$$

Le dernier terme ne contribue qu'à l'origine (il n'est donc pas partie du développement multipolaire) et joue un rôle important dans le traitement de la structure hyperfine de l'hydrogène.

Selon la correspondance (2.6) et la définition (2.39), le moment dipolaire d'un circuit de courant est

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2c} \int \mathbf{r} \wedge d\mathbf{l} \quad (2.45)$$

Pour une boucle plane avec origine à l'intérieur de la boucle, il est clair que  $\frac{1}{2} \mathbf{r} \wedge d\mathbf{l}$  est l'élément d'aire de la surface entourée par la boucle. On peut alors écrire

$$|\mathbf{m}| = \frac{I}{c} \times \text{Aire de la boucle} \quad (2.46)$$

### 2.3.2 Moment magnétique et moment cinétique

Le moment magnétique d'un système est étroitement lié à son moment cinétique. En effet, exprimons la distribution de courant en fonction des vitesses des charges ponctuelles qui la composent (cf. éq. (1.49)):

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (2.47)$$

Le moment magnétique correspondant est obtenu en substituant dans (2.39):

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_i q_i (\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{v}_i) = \sum_i \frac{q_i}{2M_i c} \mathbf{L}_i \quad (2.48)$$

où  $\mathbf{L}_i$  et  $M_i$  sont le moment cinétique et la masse de la charge  $i$ . Pour un rapport  $q/M$  commun, on peut alors écrire

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2Mc} \mathbf{L} \quad (2.49)$$

en fonction du moment cinétique total  $\mathbf{L}$ . En général, la constante de proportionnalité entre le moment magnétique d'un système et son moment cinétique est appelée *rapport gyromagnétique* et noté  $\gamma$ . Dans le cas d'un système de particules en mouvement ayant le même rapport  $q/M$ , on a

$$\gamma = \frac{q}{2Mc} \quad (2.50)$$

Ce résultat permet de calculer le moment magnétique d'un objet macroscopique en rotation, si la densité de charge  $\rho$  que porte cet objet est proportionnelle à la densité de masse de l'objet, ce qui correspond à un objet composé d'éléments ayant un rapport  $q/M$  uniforme.

**Exemple 2.2:** *Disque chargé en rotation*

Un disque mince de rayon  $a$  et de masse  $M$  porte une charge  $Q$  distribuée uniformément sur sa surface. Ce disque est en rotation autour de son axe avec une vitesse angulaire  $\omega$ . Quel est son moment dipolaire magnétique?

*Solution :* Ce disque peut être considéré comme un assemblage d'anneaux de rayon  $r$  et de largeur  $dr$ , où  $r$  varie de 0 à  $a$ . Un anneau tournant à une vitesse  $\omega$  et portant une charge  $dQ$  produit un courant circulaire  $dI = \omega dq/2\pi$ , puisque la quantité de charge passant par un point donné en un temps  $\delta t$  est égale à  $q$  fois la fraction de cercle balayée en  $\delta t$ , en l'occurrence  $\omega\delta t/2\pi$ . Le moment magnétique associé à l'anneau est donc

$$dm = \frac{dI}{c} \pi r^2 = \frac{\omega}{2c} r^2 dq \quad (2.51)$$

Mais  $dq$  est égal à  $Q$  fois la fraction d'aire occupée par l'anneau, soit  $2\pi r dr/\pi a^2$ . Le moment magnétique total s'obtient en intégrant :

$$m = \frac{Q\omega}{ca^2} \int_0^a dr r^3 = \frac{Q\omega a^2}{4c} \quad (2.52)$$

Ce résultat pourrait aussi être obtenu par la relation  $m = qL/2Mc$ , où  $L$  est le moment cinétique du disque. Comme  $L = \frac{1}{2}Ma^2\omega$ , la réponse est immédiate.

Si le moment cinétique d'un atome ne provenait que des moments cinétique orbitaux des électrons, la formule (2.49) pourrait s'appliquer à un atome dans son entier et, comme le moment cinétique orbital est quantifié en multiples entiers de  $\hbar$ , le moment magnétique d'un atome serait un multiple entier du *magnéton de Bohr*  $\mu_B$ :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} \quad (2.53)$$

où  $m_e$  est la masse de l'électron et  $-e$  la charge de l'électron.

Cependant, la relation (2.49) ne vaut pas pour le spin de l'électron, qui contribue grandement au moment cinétique d'un atome. En fait, selon la théorie de Dirac de l'électron relativiste, le moment magnétique associé à un électron est

$$\mathbf{m} = \frac{-e}{m_e c} \mathbf{S} \quad (2.54)$$

où  $\mathbf{S}$  est l'opérateur du spin. L'addition de tous les moments cinétiques orbitaux et de tous les spins dans un atome à plusieurs électrons conduit à la forme générale suivante pour le moment magnétique de l'atome :

$$\mathbf{m} = \gamma \mathbf{J} \quad \gamma \equiv \frac{ge}{2m_e c} \quad (2.55)$$

où  $\mathbf{J}$  est le moment cinétique total de l'atome,  $\gamma$  est le facteur gyromagnétique de l'atome et  $g$  un facteur numérique appelé *facteur de Landé*, généralement différent de l'unité.<sup>4</sup> Le facteur de Landé  $g_e$  d'un électron est égal à -2, selon la théorie de Dirac.

<sup>4</sup> Il ne faut pas voir la relation (2.55) comme une relation entre des opérateurs, car le facteur de Landé change d'un niveau d'énergie à un autre : il dépend des nombres quantiques principal et orbital. Le 'facteur de Landé' d'un atome est en fait le facteur  $g$  associé à l'état fondamental à plusieurs électrons de l'atome.

La mesure du facteur  $g_e$  d'un électron isolé peut être effectuée par une expérience de résonance magnétique sur un faisceau d'électrons. La technique de résonance est très précise et produit le résultat suivant :

$$g_e = -2(1 + a) \quad a_{\text{exp.}} = 0,001\,596\,521\,884(43) \quad (2.56)$$

(les chiffres entre parenthèses sont l'incertitude sur les deux derniers chiffres significatifs). La théorie quantique de l'électrodynamique permet de calculer des corrections à  $g$  par rapport à sa valeur dans la théorie de Dirac. On doit pour cela utiliser la théorie des perturbations. Le résultat au quatrième ordre est

$$a_{\text{th.}} = 0,001\,596\,521\,92(17)(73)(108) \quad (2.57)$$

L'accord entre théorie et expérience est le meilleur de toute la physique – 9 chiffres après la virgule!

Le proton, tout en étant aussi une particule de spin  $\frac{1}{2}$ , possède un facteur  $g$  bien différent :  $g_p = 2 \times 2,79$ , alors que le neutron, particule neutre de spin  $\frac{1}{2}$ , possède néanmoins un moment magnétique, avec  $g_n = -2 \times 1,93$ . Ces valeurs étranges proviennent du fait que le proton et le neutron sont des particules composites formées de quarks, alors que l'électron est une particule ponctuelle.

### 2.3.3 Force et couple sur un moment dipolaire

La force qui s'exerce sur une distribution localisée de courant par un champ magnétique est (en composantes)

$$F_i = \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \int d^3r J_j(\mathbf{r}) B_k(\mathbf{r}) \quad (2.58)$$

Si on développe  $\mathbf{B}$  en série autour du centre de la distribution ( $\mathbf{r} = 0$ ) on a, au premier ordre,

$$F_i = \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} B_k(0) \int d^3r J_j(\mathbf{r}) + \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \partial_l B_k(0) \int d^3r J_j(\mathbf{r}) x_l \quad (2.59)$$

Le premier terme s'annule, étant proportionnel à l'intégrale de  $\mathbf{J}$ . D'autre part, on sait que

$$\frac{1}{c} \int d^3r J_j x_l = \frac{1}{2c} \int d^3r (J_j x_l - J_l x_j) = \frac{1}{2c} \int d^3r \epsilon_{ljr} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{J})_r = \epsilon_{ljr} m_r \quad (2.60)$$

Donc la force devient

$$F_i = \epsilon_{ijk} \epsilon_{ljr} \partial_l B_k(0) m_r = \partial_i (B_k m_k) \quad (2.61)$$

ou encore

$$\boxed{\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})} \quad (2.62)$$

On conclut que l'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ magnétique est

$$\boxed{W = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}} \quad (2.63)$$

Ceci signifie aussi que même un champ uniforme peut exercer une influence sur un dipôle, en exerçant un couple sur la distribution de courant de façon à aligner le moment dipolaire avec le champ pour minimiser  $W$ . Si  $\theta$  est l'angle que fait  $\mathbf{m}$  avec  $\mathbf{B}$ , l'énergie potentielle est  $W = Bm \cos \theta$ ; le couple est alors  $N = -\partial W / \partial \theta$  ou  $N = Bm \sin \theta$ ; sa direction est perpendiculaire au plan qui contient  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{B}$ . En tenant compte de son signe conventionnel, on peut donc écrire

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B}} \quad (2.64)$$

On peut aussi démontrer cette relation directement : la composante  $N_i$  du couple exercé sur la distribution de courant est

$$N_i = \frac{1}{c} \epsilon_{imn} \epsilon_{njk} \int d^3r x_m J_j(\mathbf{r}) B_k(\mathbf{r}) \quad (2.65)$$

Dans ce cas le terme d'ordre zéro contribue :

$$N_i = \frac{1}{c} \epsilon_{imn} \epsilon_{njk} B_k \int d^3r x_m J_j(\mathbf{r}) = \epsilon_{imn} \epsilon_{njk} \epsilon_{mjr} m_r B_k \quad (2.66)$$

Le calcul des contractions donne  $N_i = \epsilon_{irk} m_r B_k$ , ce qui confirme la formule (2.64).

### Expérience de Stern et Gerlach

L'interaction (2.63) est bien sûr responsable de l'effet Zeeman en physique atomique, par lequel un niveau d'énergie dégénéré est séparé en plusieurs niveaux équidistants sous l'influence d'un champ magnétique, ce en raison de la quantification des orientations de spin. Quant à la force (2.62), elle est mise à profit dans l'expérience de Stern et Gerlach pour séparer les deux orientations de spin dans un faisceau d'atomes neutres. Un champ magnétique avec un fort gradient dans la direction  $z$  est appliqué sur une petite région de l'espace, par laquelle passe un faisceau d'atomes ayant une vitesse dans la direction  $x$ . Dans le champ magnétique les deux orientations de spins ont des énergies différentes. Avant que des transitions aient le temps de se produire vers l'orientation ayant l'énergie la plus basse, les atomes ayant leur spin parallèle au champ ont déjà été attirés dans la direction  $+z$  et les autres, dans la direction opposée : le faisceau a été séparé en deux. Cette expérience a permis de mettre clairement en évidence la quantification de l'orientation du spin.

L'énergie potentielle (2.63) et l'expression (2.43) pour le champ dipolaire nous permet d'écrire l'expression suivante pour l'énergie d'interaction entre deux dipôles magnétiques  $\mathbf{m}_1$  et  $\mathbf{m}_2$ :

$$U_{\text{dip.}} = \frac{1}{r^3} (\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 - 3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_2)) - \frac{8\pi}{3} \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (2.67)$$

Cette *interaction dipolaire* joue un rôle souvent important dans les solides magnétiques, en particulier dans les ferroaimants. Elle est aussi la source de la structure hyperfine de l'hydrogène et d'autres atomes.

### 2.3.4 Précession de Larmor

Considérons un moment magnétique  $\mathbf{m}$  dans un champ magnétique uniforme et constant  $\mathbf{B}$ . Un couple  $\mathbf{N} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B}$  s'exerce sur lui et son moment cinétique  $\mathbf{J}$  varie en conséquence :  $d\mathbf{J}/dt = \mathbf{N}$ . D'après l'éq. (2.55), ceci signifie que

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \gamma \mathbf{m} \wedge \mathbf{B} \quad (2.68)$$

De cette équation on déduit que la composante de  $\mathbf{m}$  dans la direction de  $\mathbf{B}$  est constante dans le temps, alors que les deux autres composantes forment un vecteur tournant dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$ . En effet, rappelons que la dérivée temporelle d'un vecteur  $\mathbf{A}$  tournant à une vitesse angulaire constante  $\omega$  autour d'un axe  $\mathbf{n}$  est

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{A} \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n} \quad (2.69)$$

Cette équation reste inchangée si on ajoute à  $\mathbf{A}$  une composante constante dans la direction de  $\boldsymbol{\omega}$ . On conclut que le moment magnétique précède autour de  $\mathbf{B}$  avec un vecteur vitesse angulaire

$$\boldsymbol{\omega}_L = -\gamma\mathbf{B} \quad \omega_L = |\gamma|B \quad (2.70)$$

On appelle  $\omega_L$  la fréquence de Larmor et ce mouvement de précession la *précession de Larmor*. La correspondance entre la mécanique classique et la mécanique quantique associe à tout mouvement périodique de fréquence  $\omega$  une différence de niveaux d'énergie  $\hbar\omega$  entre deux états quantiques. Dans le cas de la précession de Larmor,  $\hbar\omega_L$  est la différence d'énergie entre les différents états de projection du moment cinétique selon  $\mathbf{B}$  (effet Zeeman).

La présence d'états du moment cinétique séparés par une énergie  $\hbar\omega_L$  permet d'envisager des transitions quantiques entre ces états, au cours desquelles des photons sont émis ou absorbés. Ces transitions se produisent lorsque l'onde électromagnétique incidente est en résonance avec le système oscillant, c'est-à-dire lorsque sa fréquence est égale à la fréquence de Larmor. Voyons ce que ceci signifie du point de vue classique, dans une situation de *résonance magnétique*. Supposons qu'un moment magnétique soit plongé dans un champ magnétique constant  $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}}$ , auquel on superpose un faible champ magnétique tournant dans le plan  $xy$ :

$$\mathbf{B}_1(t) = B_1(\cos\omega t \hat{\mathbf{x}} + \sin\omega t \hat{\mathbf{y}}) \quad (2.71)$$

En pratique,  $\mathbf{B}_0$  est créé par un électroaimant, souvent supraconducteur, alors que  $\mathbf{B}_1$  est créé par une modeste solénoïde ou par une cavité résonante ( $B_1 \ll B_0$ ). Comme il est difficile d'analyser le mouvement d'un moment magnétique dans un champ tournant, plaçons-nous dans un référentiel tournant à la même vitesse que  $\mathbf{B}_1$ . On sait que la dérivée temporelle d'un vecteur  $\mathbf{A}$  dans un référentiel tournant, en fonction de sa dérivée dans un référentiel inertiel, est

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_I - \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{A} \quad (2.72)$$

Comme le champ magnétique est constant dans ce référentiel tournant, on trouve

$$\left(\frac{d\mathbf{m}}{dt}\right)_R = \mathbf{m} \wedge \{\gamma\mathbf{B} + \boldsymbol{\omega}\} \quad (2.73)$$

où  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ . Dans le référentiel tournant, on constate que la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$  joue le rôle d'un champ magnétique 'fictif', contribuant à un champ magnétique effectif

$$\mathbf{B}_{\text{eff.}} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 + \boldsymbol{\omega}/\gamma \quad (2.74)$$

Dans ce référentiel, le moment magnétique effectue donc un mouvement de précession à la fréquence de Larmor  $\omega_L = \gamma B_{\text{eff.}}$ , autour de l'axe de  $\mathbf{B}_{\text{eff.}}$ . Si  $\omega$  (la fréquence du champ magnétique tournant) est petit par rapport à la fréquence de Larmor  $\omega_0 = |\gamma|B_0$ , alors la précession de  $\mathbf{m}$  autour de  $\mathbf{B}_0$  n'est que légèrement modifiée par le champ  $\mathbf{B}_1$ . La projection  $\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{z}}$  reste essentiellement la même : elle ne fait qu'osciller entre deux bornes assez rapprochées. La même chose est vraie si  $\omega \gg \omega_0$  : la variation de  $\mathbf{B}_1$  est trop rapide pour faire basculer  $\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{z}}$  dans l'autre sens. Cependant, si  $\omega = \omega_0$  (ou  $-\omega_0$ , selon le signe de  $\gamma$ ), le champ effectif  $\mathbf{B}_{\text{eff.}}$  dans le référentiel tournant est entièrement dans le plan  $xy$  et la précession autour de ce champ fait basculer la composante en  $z$  du moment magnétique, aussi petit soit  $B_1$  par rapport à  $B_0$ . Un infime champ magnétique peut donc avoir un effet majeur sur le mouvement de précession de  $\mathbf{m}$ , s'il oscille dans

le temps à la fréquence de Larmor associée au champ constant  $B_0$ : c'est la *résonance magnétique*.

La résonance magnétique a de multiples applications en physique expérimentale, en analyse chimique et en physique médicale. On distingue la *résonance magnétique nucléaire* (RMN), dans laquelle ce sont les moments magnétiques des noyaux qui sont mis en résonance, de la *résonance paramagnétique électronique* (RPE), dans laquelle ce sont les moments magnétiques des nuages électroniques qui sont mis en résonance. Comme le rapport des masses du proton et de l'électron est d'environ 2000, la fréquence de résonance typique en RPE est  $10^3$  fois plus grande qu'en RMN. Le champ magnétique net ressenti par le moment magnétique d'un noyau ou d'un électron n'est pas seulement le champ appliqué ( $\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ ), mais aussi le champ magnétique local créé par les voisins atomiques de ce moment magnétique. Ce champ est faible, mais modifie légèrement la fréquence de résonance. Ceci permet d'identifier l'environnement dans lequel se situe le moment magnétique, d'où l'utilité de la RMN en chimie. D'autre part, comme dans tout système résonant, l'énergie transférée au système oscillant (ici, les moments magnétiques) est maximale à la résonance. La mesure de cette énergie transférée permet de mesurer la concentration à un endroit donné d'une certaine catégorie de moments magnétiques (par exemple, des protons). Ainsi, la concentration en hydrogène d'une portion du corps humain peut être mesurée à un endroit précis à l'intérieur du corps, en temps réel, sans intrusion. Ceci permet de visualiser l'intérieur du corps, par tranches successives, et d'identifier des pathologies.

## 2.4 Magnétisme macroscopique

### 2.4.1 Aimantation

Comme les molécules peuvent développer une polarisation moyenne sous l'influence d'un champ électrique, elles peuvent aussi développer un moment dipolaire magnétique moyen sous l'effet d'un champ externe. Cependant, le magnétisme atomique est un sujet beaucoup plus riche, en raison de l'existence du spin et du principe de Pauli.

Soit  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  l'aimantation moyenne d'un matériau magnétique. Cette aimantation représente le moment dipolaire moyen par unité de volume et, en vertu de la formule (2.40), contribue au potentiel vecteur aussi bien que la densité de courant *libre*  $\mathbf{J}$  qui s'y ajoute :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_V d^3r' \left\{ \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{c\mathbf{M}(\mathbf{r}') \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} \quad (2.75)$$

Le deuxième terme peut s'écrire comme

$$\int_V d^3r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \wedge \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \int_V d^3r' \frac{\nabla' \wedge \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \oint_S d\mathbf{a} \wedge \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.76)$$

après une intégration par partie (attention au signe!). Cette dernière équation a l'interprétation suivante : L'aimantation agit comme une densité de courant  $\mathbf{J}' = c\nabla \wedge \mathbf{M}$  liée au matériau, plus une densité superficielle de courant  $\mathbf{K}' = c\mathbf{M} \wedge \mathbf{n}$  apparaissant à la surface du matériau :

$$\boxed{\mathbf{J}' = c\nabla \wedge \mathbf{M}} \quad \boxed{\mathbf{K}' = c\mathbf{M} \wedge \mathbf{n}} \quad (2.77)$$

En fonction de l'aimantation  $\mathbf{M}$ , la loi d'Ampère peut s'écrire

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + 4\pi \nabla \wedge \mathbf{M} \quad (2.78)$$



On définit le *champ magnétique*

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \quad (2.79)$$

Alors la loi d'Ampère s'écrit

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (2.80)$$

Le rôle de ce nouveau vecteur  $\mathbf{H}$  est le même que celui de  $\mathbf{D}$  en électrostatique, c'est-à-dire d'être insensible aux courants liés (aux charges liées, dans le cas de  $\mathbf{D}$ ) sauf par l'intermédiaire des conditions aux limites. Il ne faut pas chercher dans  $\mathbf{H}$  une signification à caractère plus intuitif que ce qui est fourni par sa définition et par la loi d'Ampère.\*

Profitons de ce moment pour écrire toutes ensemble les lois de l'électromagnétisme statique :

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} = 0 & \nabla \wedge \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{array} \quad (2.81)$$

## 2.4.2 Diamagnétisme

Les différents matériaux se distinguent par la relation qui existe entre  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{B}$  ou entre  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{B}$ . Cette relation s'obtient par des considérations microscopiques impliquant évidemment la mécanique quantique et ne peut être comprise par des arguments classiques seulement.

Considérons premièrement les matériaux dits *diamagnétiques*. Dans ceux-ci les atomes ne possèdent pas de moment magnétique permanent, car les couches électroniques sont complètement remplies : le moment cinétique de l'atome dû aux électrons d'annule, ainsi que le moment magnétique associé. Cependant, ces atomes peuvent développer un moment magnétique *induit* si un champ magnétique externe  $\mathbf{B}_0$  est appliqué. Contrairement au phénomène diélectrique correspondant, le moment induit sera ici opposé au champ appliqué. Ceci peut se comprendre intuitivement à l'aide de la loi de Lenz pour l'induction magnétique (voir le chapitre suivant) : l'application du champ magnétique externe induit un courant dans l'atome qui en retour crée un champ induit qui s'oppose au changement du champ, c'est-à-dire qui s'oppose au champ externe. Donc le moment magnétique associé à cette boucle de courant atomique est opposé au champ. L'intensité de ce phénomène est très faible et proportionnelle au champ appliqué : on a donc une relation linéaire entre l'aimantation induite  $\mathbf{M}$  et le champ magnétique  $\mathbf{B}$  ou  $\mathbf{H}$ . On écrit

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad \text{ou} \quad \mathbf{M} = \chi_m\mathbf{H} \quad (2.82)$$

où  $\mu = 1 + 4\pi\chi_m$  est la *perméabilité magnétique* et  $\chi_m$  est la *susceptibilité magnétique*. Dans les matériaux diamagnétiques,  $\chi_m$  est *négligé* puisque  $\mathbf{M}$  s'oppose au champ et donc  $\mu < 1$ . Le matériau le plus diamagnétique connu est le Bismuth, avec  $1 - \mu \sim 1.8 \times 10^{-4}$ .

À l'aide d'un modèle simplifié de l'atome, tentons d'obtenir un ordre de grandeur pour le moment magnétique induit dans un atome diamagnétique. Considérons un électron en orbite circulaire de rayon  $r$  autour du noyau. Appliquons progressivement un champ magnétique  $\mathbf{B}$

---

\* Notons que la terminologie utilisée peut varier d'un auteur à l'autre. On appelle parfois  $\mathbf{H}$  l'*intensité du champ magnétique*, alors que  $\mathbf{B}$  est appelé tout bonnement *champ magnétique*. C'est le cas de MARION et de LANDAU ET LIFCHITZ.

perpendiculaire à l'orbite. La force électromotrice induite le long de l'orbite par la variation du champ magnétique et le champ électrique  $E$  associé sont donnés par

$$\text{f.é.m.} = 2\pi r E = -\frac{1}{c}\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.83)$$

Ce champ électrique  $E = -(r/2c)\dot{B}$  produit un couple de grandeur  $-eEr$  sur l'électron, ce qui induit une variation de son moment cinétique donnée par  $\dot{J} = N = (er^2/2c)\dot{B}$ . En intégrant sur le temps, on trouve

$$J = \frac{er^2}{2c} B \implies |\mathbf{m}| = -\frac{e}{2m_e c} J = -\frac{e^2 r^2}{4m_e c^2} B \quad (2.84)$$

Si on définit la susceptibilité atomique  $\chi_{\text{at.}}$  comme la constante de proportionnalité entre le moment magnétique moyen induit  $\langle \mathbf{m} \rangle$  et le champ magnétique appliqué  $\mathbf{B}$ , on a donc

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \chi_{\text{at.}} \mathbf{B} \quad \chi_{\text{at.}} \sim -\frac{e^2 a_0^2}{4m_e c^2} \quad (2.85)$$

où  $a_0$  est le rayon de Bohr, c'est-à-dire la taille approximative de l'atome. Signalons que  $\chi_{\text{at}}$  est l'analogie magnétique de la polarisabilité d'un atome et a aussi les unités d'un volume. La susceptibilité magnétique proprement dite est  $\chi_m = N\chi_{\text{at.}}$ , où  $N$  est le nombre d'atomes par unité de volume. En fonction de  $a_0 = \hbar^2/m_e e^2$  et de la constante de structure fine  $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ ,  $\chi_{\text{at.}}$  peut s'écrire

$$\chi_{\text{at.}} \sim -a_0^3 \alpha^2 \quad (2.86)$$

Rappelons que la polarisabilité électrique d'un atome est plutôt de l'ordre de  $a_0^3$ . Le diamagnétisme est donc un effet beaucoup plus faible (par environ  $10^4$ ).

### 2.4.3 Paramagnétisme

Si un matériau est composé d'atomes dont les couches électroniques ne sont que partiellement remplies, ce qui est le cas notamment des éléments dits *de transition*, alors ces atomes portent un moment magnétique permanent. Cependant, ces moments permanents sont généralement orientés de manière aléatoire en raison de l'agitation thermique, de sorte que l'aimantation  $\mathbf{M}$  est en moyenne zéro en l'absence de champ appliqué. De tels matériaux sont dits *paramagnétiques*. Si un champ externe  $\mathbf{B}_0$  est appliqué au matériau, les moments magnétiques microscopiques auront tendance à s'aligner avec le champ  $\mathbf{B}$  dans le but de minimiser leur énergie potentielle  $-\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ . L'aimantation sera alors proportionnelle au champ  $\mathbf{B}$ , pourvu que cette énergie potentielle magnétique soit petite par rapport à l'énergie thermique  $k_B T$ . On peut alors écrire une relation linéaire comme ci-haut, sauf que maintenant  $\chi_{\text{at.}}$  est positif et  $\mu > 1$ . Le calcul simple précédant l'éq. (1.146) peut être repris ici sans modification et donne

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \chi_{\text{at.}} \mathbf{B} \quad \chi_{\text{at.}} = \frac{m_0^2}{3k_B T} \quad (2.87)$$

où  $m_0$  est la grandeur du moment dipolaire magnétique permanent. On constate que la susceptibilité magnétique  $\chi_m$  varie en fonction inverse de la température (loi de Curie). L'ordre de grandeur typique de  $m_0$  est  $e\hbar/m_e c$ . Donc

$$\chi_{\text{at.}} \sim \frac{e^2 \hbar^2}{m_e^2 c^2} \frac{1}{k_B T} = a_0^2 \alpha^2 \left( \frac{e^2/a_0}{k_B T} \right) \quad (2.88)$$

où  $e^2/a_0$  est l'énergie d'ionisation  $E_{\text{ion.}}$  typique d'un atome. La susceptibilité paramagnétique est donc plus grande que la susceptibilité diamagnétique par un facteur  $E_{\text{ion.}}/k_B T$ . À température ambiante, ce facteur est de l'ordre de  $10^2 - 10^3$ . La même remarque s'applique au rapport de la polarisabilité électronique à la polarisabilité paraélectrique. Les valeurs typiques de  $\chi_m$  varient entre  $10^{-5}$  et  $10^{-2}$ .

### 2.4.4 Ferromagnétisme

Lorsque la température d'un matériau paramagnétique est suffisamment faible, il se produit généralement un changement de phase qui affecte beaucoup les propriétés magnétiques du matériau. Dans les matériaux dits *ferromagnétiques*, les moments magnétiques permanents des atomes s'alignent les uns sur les autres de manière spontanée, en l'absence de champ externe. Par exemple, le fer, le nickel et le cobalt sont ferromagnétiques à température ambiante. Le changement de phase ferromagnétique-paramagnétique se produit à la température dite de *Curie*, notée  $T_C$  et qui dépend des propriétés microscopiques de chaque substance.

#### Origine microscopique du ferromagnétisme

L'origine du phénomène est liée à l'interaction électrostatique entre les électrons et au principe d'exclusion de Pauli. Rappelons que ce principe stipule que la fonction d'onde d'un système de plusieurs électrons doit être antisymétrique quand deux électrons sont échangés. Considérons par exemple un cristal de Nickel, dont chaque atome comporte un électron dans une couche supérieure. La fonction d'onde de deux électrons appartenant à des atomes voisins de Nickel doit être antisymétrique. Cette antisymétrie peut être réalisée soit dans la partie spatiale de la fonction d'onde, soit dans la partie 'spin'. Étant donné la forte répulsion électrique entre les deux électrons, une fonction d'onde spatialement antisymétrique garantit que les deux électrons ne seront pas au même endroit en même temps et donc minimise l'énergie. Il s'ensuit que la partie 'spin' de la fonction d'onde doit être symétrique et que les spins des deux électrons sont parallèles. Donc il y a alignement des moments magnétiques dans ce matériau et l'énergie associée à cet alignement est d'origine électrique, donc beaucoup plus grande qu'une énergie magnétique typique, comme l'interaction dipolaire par exemple. L'argument donné ici est simpliste et ne s'applique pas de manière universelle, sinon tous les matériaux paramagnétiques deviendraient ferromagnétiques à des températures suffisamment basses, ce qui n'est pas le cas. Certains matériaux ont la tendance opposée : les spins des atomes magnétiques voisins préfèrent être antiparallèles. On parle alors d'antiferromagnétisme. Dans ce cas les deux atomes magnétiques sont souvent séparés spatialement par un atome non-magnétique. Ces considérations mènent à une interaction effective entre deux spins  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$ , appelée *interaction d'échange*:

$$U_{\text{éch.}} = -J\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \quad (2.89)$$

où  $J$  est une constante de l'ordre de l'énergie électrostatique entre les deux électrons correspondants. Dans le cas ferromagnétique,  $J$  est positif, alors qu'il est négatif dans le cas antiferromagnétique.

#### Hystérèse

La relation existant entre  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  dans un matériau ferromagnétique est non-linéaire. Non seulement est-elle non linéaire, mais elle dépend aussi de l'histoire du matériau, c'est-à-dire des champs appliqués aux instants précédents. On dit qu'il y a *hystérèse*. Une relation typique est indiquée à la figure 2.1. La raison de cette irréversibilité dans le comportement de l'aimantation est la suivante : les moments magnétiques microscopiques ne sont pas globalement alignés dans le matériau, mais plutôt regroupés en *domaines* mésoscopiques. Dans chacun des domaines il y a alignement des dipôles atomiques, mais l'orientation de  $\mathbf{M}$  varie d'un domaine à l'autre. La séparation spontanée du milieu en différents domaines survient dans le but de minimiser l'énergie magnétique totale de l'échantillon, c'est-à-dire l'énergie d'un domaine dans le champ créé par les autres domaines. Au fond, il s'agit ici de l'interaction dipolaire qui prend sa revanche sur l'interaction d'échange. Cette dernière est beaucoup plus forte, mais a une portée beaucoup moindre que la première. Il est donc avantageux d'avoir un alignement des moments à courte distance (à l'intérieur des domaines) mais une orientation presque antiparallèle aux longues distances. Lorsqu'un champ externe est appliqué, certains domaines, ayant une aimantation parallèle au champ appliqué, sont avantagés par rapport aux autres et croissent à leur dépend. Les *murs* séparant les différents domaines sont donc mobiles. Cependant, le mouvement des murs dissipe de l'énergie et il s'agit là de l'origine

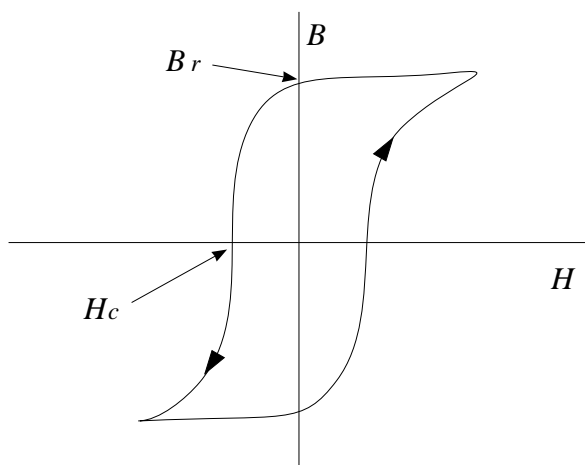


Figure 2.1. Courbe d'hystérèse typique dans un matériau ferromagnétique. Le champ  $B_r$  est le champ magnétique résiduel qui demeure après que le champ appliqué  $\mathbf{H}$  s'annule. D'autre part,  $H_c$  est le champ qu'il faut appliquer pour éliminer l'aimantation résiduelle. L'alliage *Alnico*, un matériau dur, est caractérisé par les valeurs  $B_r \sim 13000$  gauss et  $H_c \sim 550$  gauss, alors que le *supermalloy* est l'archétype du matériau mou, avec  $B_r \sim 5000$  et  $H_c \sim 0,004$ .

de l'hystérèse. Dans les matériaux dits *durs*, les murs se déplacent difficilement, de sorte que l'aimantation conserve longtemps sa valeur. Ces matériaux ont une valeur élevée de  $H_c$  (voir la figure) et sont utilisés comme aimants permanents. Au contraire, dans les matériaux *mous*, les murs se déplacent facilement et l'aimantation s'aligne sur le champ appliqué sans trop dissiper d'énergie, ce qui est utile dans les transformateurs, etc.

### 2.4.5 Conditions aux limites des champs $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$

À l'interface de deux milieux ayant des propriétés magnétiques différentes, la composante normale de l'induction magnétique est continue, en raison de la loi différentielle  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

Par contre, la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue s'il y a des courants libres de surface. Si  $\mathbf{K}$  est la densité superficielle de courant, alors l'application du théorème de Stokes près de l'interface à la relation  $\nabla \wedge \mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{J}$  donne

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \wedge \mathbf{n} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{K} \quad (2.90)$$

En effet, soit  $\mathbf{n}_1$  le vecteur normal à une boucle rectangulaire infinitésimale traversant l'interface et  $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}$ . Alors  $\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = (4\pi/c)\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{K}$  ou

$$(\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n} \wedge (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{K} \quad (2.91)$$

d'où on peut conclure la formule ci-haut, en raison de l'arbitraire de  $\mathbf{n}_1$ .

#### Exemple 2.3: Barreau aimanté

Soit un barreau cylindrique de longueur  $l$  et de rayon  $a$ , dans lequel il y a aimantation uniforme et constante  $\mathbf{M}$ . Calculer  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  au centre et à l'extrémité du cylindre.

*Solution :* Utilisons les coordonnées cylindriques avec origine au centre de la barre, laquelle s'étend de  $z = -\frac{1}{2}l$  à  $z = \frac{1}{2}l$ . La normale à la barre est  $\hat{\mathbf{r}}$ . L'aimantation est  $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$ .  $\mathbf{M}$  étant uniforme à l'intérieur,  $\nabla \wedge \mathbf{M} = 0$  et la seule trace que laisse cette aimantation est une densité superficielle

$$\mathbf{K}' = Mc\hat{\mathbf{z}} \wedge \hat{\mathbf{r}} = Mc\hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (2.92)$$

Commençons par calculer la contribution à l'induction magnétique à l'origine d'une mince boucle de courant située à  $z$ : la loi de Biot-Savart donne

$$\begin{aligned} d\mathbf{B} &= -\frac{I}{c} \int \frac{ad\varphi}{r^3} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \wedge \mathbf{r}' \\ &= \frac{2\pi I}{c} \frac{a^2}{r^3} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (2.93)$$

En intégrant cette expression sur  $z$ , on obtient ( $I = Mcdz$ )

$$\begin{aligned} B_z(0) &= 2\pi a^2 M \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= 4\pi M \frac{l/2}{\sqrt{a^2 + (l/2)^2}} \\ &= 4\pi M \sin \theta_{max} \end{aligned} \quad (2.94)$$

où  $\theta_{max}$  est l'angle que fait le bord extrême du barreau avec le plan  $z = 0$ . Dans le cas du barreau très mince, on trouve  $B = 4\pi\mathbf{M}$  au centre et donc  $\mathbf{H}(0) = 0$ . À l'extrémité, il faut intégrer différemment :

$$\begin{aligned} B_z(l/2) &= 2\pi a^2 M \int_0^l \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= 2\pi M \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}} \\ &= 2\pi M \sin \theta'_{max} \end{aligned} \quad (2.95)$$

Dans la limite du barreau étroit, on trouve  $B_z(l/2) = 2\pi\mathbf{M}$  et donc  $\mathbf{H}(l/2) = -2\pi\mathbf{M}$ : le champ est opposé à l'induction magnétique. On voit que dans ce cas la relation entre  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  n'est pas linéaire. En dehors du barreau,  $\mathbf{H} = \mathbf{B}$  puisque  $\mathbf{M} = 0$ .

Dans la limite du barreau étroit et près de sa surface, on trouve que  $\mathbf{B} \sim 0$  en dehors et  $\mathbf{B} \sim 4\pi\mathbf{M}$  à l'intérieur, en utilisant la loi d'Ampère sous sa forme intégrale.

Très loin du barreau, on doit retrouver le champ d'un dipôle magnétique  $\mathbf{m} = \pi a^2 l \mathbf{M}$ .

## 2.4.6 Potentiel scalaire magnétique

Nous allons ici expliquer une méthode de résolution des problèmes aux limites en magnétostatique, particulièrement adaptée aux cas où la densité de courant libre est nulle dans la région d'intérêt. Dans ce cas le champ magnétique  $\mathbf{H}$  est irrotationnel :  $\nabla \wedge \mathbf{H} = 0$ ; donc on peut l'écrire comme le gradient d'un champ scalaire  $\Phi_m$  qu'on appelle le *potentiel scalaire magnétique*:

$$\mathbf{H} = -\nabla \Phi_m \quad (2.96)$$

Il y a alors une parfaite analogie entre les situations électrostatiques sans charge libre ( $\rho = 0$ ,  $\rho_s = 0$ ) et les situations magnétostatiques sans courant libre ( $\mathbf{J} = 0$ ,  $\mathbf{K} = 0$ ). Cette analogie se manifeste avec la correspondance suivante :

$$\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H} \quad \mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{B} \quad (2.97)$$

En effet, les lois différentielles et les conditions aux limites sont les mêmes dans ce cas :

$$\begin{array}{|l} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \mathbf{E} = -\nabla \Phi \\ \mathbf{E}_{\parallel} \text{ continu} \\ \mathbf{D}_{\perp} \text{ continu} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|l} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{H} = -\nabla \Phi_m \\ \mathbf{H}_{\parallel} \text{ continu} \\ \mathbf{B}_{\perp} \text{ continu} \end{array}$$

Une différence essentielle demeure, cependant : la relation entre  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  peut très souvent être non linéaire, ce qui est plus rare entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$ . D'autre part, les situations électrostatiques comportent souvent des corps conducteurs sur lesquels le potentiel électrique  $\Phi$  est constant, ce qui ne se produit pas pour le potentiel scalaire magnétique.

Si la relation entre  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  est linéaire ( $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ) alors la relation  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  implique  $\nabla^2 \Phi_m = 0$ : le potentiel magnétique satisfait à l'équation de Laplace. La méthode de séparation des variables peut alors être utilisée, comme dans le cas électrostatique.

Dans le cas plus général où la relation entre  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  n'est pas linéaire, comme par exemple en présence d'aimants permanents, on ne peut qu'affirmer ceci :

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla^2 \Phi_m = 4\pi \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (2.98)$$

On définit alors une densité de 'charge magnétique'  $\xi = -\nabla \cdot \mathbf{M}$  et une densité superficielle de charge magnétique  $\xi_s = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}$  à une interface, comme pour la charge liée à un diélectrique. La solution à l'équation de Poisson nous est heureusement connue :

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\xi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int da \cdot \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.99)$$

Ceci nous permet de calculer  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{B}$  si l'aimantation est connue. Naturellement, la charge magnétique n'est pas une quantité fondamentale comme la charge électrique, mais une quantité intermédiaire reliée à l'aimantation qui n'a son utilité que si  $\Phi_m$  est bien défini, c'est-à-dire en l'absence de courant libre. La charge magnétique représente alors la source du champ  $\mathbf{H}$  de la même façon que la charge électrique est la source du champ  $\mathbf{E}$ .

**Exemple 2.4:** *Sphère avec aimantation uniforme.*

*Un sphère de rayon  $a$  porte une aimantation uniforme  $\mathbf{M}$ . Calculer  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{B}$  partout.*

*Solution :* Adoptons les coordonnées sphériques, avec l'origine au centre de la sphère et l'axe  $z$  dans la direction de l'aimantation :  $\mathbf{M} = M \hat{\mathbf{z}}$ . Comme aucun courant libre n'est présent, on utilisera la méthode du potentiel scalaire magnétique. Étant donné que l'aimantation est uniforme, la densité de charge magnétique  $\xi$  s'annule, mais une densité superficielle  $\xi_s$  existe à la surface de la sphère :  $\xi_s = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{M} = M \cos \theta$ . La relation (2.99) donne donc

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = a^2 M \int d\Omega' \frac{\cos \theta'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.100)$$

où  $d\Omega' = \sin \theta' d\theta' d\varphi'$ ,  $(\theta', \varphi')$  étant les coordonnées d'un point de source sur la sphère. Si  $\gamma$  est l'angle entre  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$ , on peut écrire

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = a^2 M \int d\Omega' \cos \theta' \sum_{l=0}^{\frac{r_{<}}{r_{>}^{l+1}}} P_l(\cos \gamma) \quad (2.101)$$

où  $r_{<} = r$ ,  $r_{>} = a$  si  $r < a$  et vice-versa si  $r > a$ . On utilise ensuite la formule d'addition des harmoniques sphériques :

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.102)$$

Substituons cette expression dans  $\Phi_m$ , en remarquant que  $\cos \theta' = C Y_{10}(\theta', \varphi')$ , avec  $C = \sqrt{4\pi/3}$ :

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = a^2 M \frac{4\pi}{2l+1} C \sum_{l,m}^{\frac{r_{<}}{r_{>}^{l+1}}} \int d\Omega' Y_{10}(\theta', \varphi') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.103)$$

La relation d'orthogonalité des harmoniques sphériques nous permet d'intégrer sur  $\Omega'$ :

$$\int d\Omega' Y_{10}(\theta', \varphi') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') = \delta_{l1} \delta_{m0} \quad (2.104)$$

Il ne reste donc que

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{3} a^2 M \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \cos \theta \quad (2.105)$$

On en déduit que si  $r > a$ , alors

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{3} M a^3 \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (r > a) \quad (2.106)$$

Ce qui implique que  $\mathbf{H}$  ( $= \mathbf{B}$ ) a la forme dipolaire (2.43). On remarque que le moment dipolaire associé est alors égal à  $M$  fois le volume de la sphère. À l'intérieur de la sphère, on a plutôt  $\Phi_m = \frac{4}{3}\pi M z$ , ce qui implique

$$\mathbf{H} = -\frac{4}{3}\pi \mathbf{M} \quad \mathbf{B} = \frac{8}{3}\pi \mathbf{M} \quad (2.107)$$

Le champ  $\mathbf{H}$  s'oppose donc à l'aimantation, contrairement à  $\mathbf{B}$ .

## Problèmes

### Problème 2.1

Une boucle circulaire de rayon  $a$  porte un courant  $I$ . Calculez le champ magnétique partout le long de l'axe de la boucle.

### Problème 2.2

Un solénoïde cylindrique de rayon  $a$  et de longueur  $L$  comporte  $n$  tours par unité de longueur et porte un courant  $I$ . On suppose que  $L \gg a$ , c.-à-d. que le solénoïde est très étroit. Calculez  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{A}$  à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde, en restant toutefois proche de celui-ci (de sorte que le solénoïde apparait infini).

**Problème 2.3**

Exprimez la contribution quadrupolaire  $\mathbf{A}^{(4)}$  d'une densité de courant arbitraire au vecteur potentiel en fonction de  $\mathbf{J}$ .

**Problème 2.4**

Une sphère de rayon  $a$  porte une charge  $Q$  uniformément distribuée sur sa surface et est en rotation sur elle-même avec une vitesse angulaire  $\omega$ . Calculez le moment dipolaire magnétique associé.

**Problème 2.5**

Une coquille sphérique de rayon intérieur  $a$  et de rayon extérieur  $b$  est faite d'un matériau magnétique linéaire de perméabilité  $\mu$ . Cette coquille est placée dans un champ d'induction magnétique externe uniforme  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ . Montrez que l'induction magnétique à l'intérieur de la coquille est

$$\mathbf{B}_{int} = \frac{9\mu}{(2\mu + 1)(\mu + 2) - 2(a/b)^3(\mu - 1)^2} B_0 \hat{\mathbf{z}} \quad (2.108)$$

Dans ce problème, il est indiqué d'utiliser le potentiel scalaire magnétique et la solution à l'équation de Laplace en coordonnées sphériques avec symétrie azimutale. Les conditions aux limites aux deux interfaces (à  $r = a$  et  $r = b$ ) sont importantes. Un tel objet permet d'écranter un champ magnétique externe : il y a un facteur de réduction  $R$  défini par  $\mathbf{B}_{int.} = R\mathbf{B}_0$ . Discutez de la dépendance de ce facteur en fonction de  $\mu$  quand  $\mu \gg 1$  et en fonction de l'épaisseur de la coquille.

**Problème 2.6**

Considérez une disque aimanté de rayon  $a$  et d'épaisseur  $h$ , tel que  $h \ll a$  (disque mince). Ce disque porte une aimantation uniforme  $\mathbf{M} = M \hat{\mathbf{z}}$  (on prend  $\hat{\mathbf{z}}$  le long de l'axe de symétrie du disque). Calculez  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  au centre du disque, le long de l'axe de symétrie [considérez par exemple l'origine  $(0, 0, 0)$  au milieu du disque et un point sur la surface :  $(0, 0, h/2)$ ]. Faites le calcul de deux façons différentes : (a) à l'aide de la loi de Biot-Savart et du courant lié. (b) à l'aide de la 'charge magnétique' et du potentiel scalaire magnétique.

**Problème 2.7**

Un matériau supraconducteur a la propriété d'exclure tout champ magnétique de son intérieur. Ainsi, si on plonge un corps supraconducteur dans un champ magnétique uniforme, une densité superficielle de courant  $\mathbf{K}$  sera induite à la surface du supraconducteur pour annuler le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur. Considérons une sphère supraconductrice de rayon  $a$ , plongée dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ . L'objet de ce problème est de calculer le champ magnétique partout à l'extérieur de la sphère et de calculer la densité superficielle de courant induite.

a) Sachant que la seule source de courant se trouve sur la surface de la sphère, écrivez le champ  $\mathbf{B}$  à l'extérieur comme le gradient d'une fonction ( $\mathbf{B} = -\nabla\Phi_m$ ) et trouvez  $\mathbf{B}$  partout à l'extérieur en solutionnant l'équation de Laplace pour  $\Phi_m$ , avec les conditions aux limites appropriées, à savoir que la composante normale de  $\mathbf{B}$  doit s'annuler à la surface de la sphère. Quel est le dipôle magnétique induit de la sphère? Pourquoi peut-on utiliser l'équation de Laplace dans ce problème?

b) Trouvez la densité superficielle de courant  $\mathbf{K}'$  sur la sphère, à partir de la solution trouvée plus haut.

c) Décrivez les ressemblances et les différences entre ce problème et celui d'une sphère conductrice plongée dans un champ électrique uniforme en ce qui a trait aux conditions aux limites et aux lignes de champ.

d) Trouvez une expression possible pour le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère.



# Électrodynamique

## 3.1 Induction

### 3.1.1 Loi de Faraday

On définit la *force électromotrice* (f.é.m.)  $V$  d'un circuit fermé  $C$  comme étant la circulation du champ électrique autour de ce circuit :

$$V = \oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} \quad (3.1)$$

En électrostatique et magnétostatique la force électromotrice le long d'un circuit fermé est nulle puisque le champ électrique est alors irrotationnel.\* Dans les situations où les courants dépendent du temps le champ électrique n'est plus irrotationnel et une f.é.m. non nulle est possible, comme l'ont montré les travaux de M. Faraday à partir des années 1830. La loi de Faraday stipule que la force électromotrice d'un circuit fermé est proportionnelle à la dérivée par rapport au temps du *flux magnétique* passant à travers la boucle du circuit.

Le flux magnétique à travers une surface  $S$  est évidemment défini comme

$$\Phi_B[S] = \int_S d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} \quad (3.2)$$

Comme  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , ce flux ne dépend pas de la forme précise de la surface mais uniquement du contour  $C$  qui lui sert de frontière. En effet, en utilisant le théorème de Stokes pour  $\mathbf{B}$ , le flux magnétique peut être exprimé comme la circulation du potentiel vecteur le long du circuit :

$$\Phi_B[C] = \int_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} \quad (3.3)$$

La loi de Faraday s'écrit donc

$$\oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} \quad (3.4)$$

---

\* On parle souvent de la force électromotrice d'une source de courant, par exemple d'une pile. Il s'agit alors du travail par unité de charge accompli par le champ électrique le long d'un circuit allant du pôle positif au pôle négatif de la pile. Un tel circuit n'est pas fermé; pour le fermer il faut parcourir l'intérieur de la pile, du pôle négatif au positif. Le travail total est alors nul, dans une situation stationnaire.

En utilisant le théorème de Stokes pour  $\mathbf{E}$ , on peut écrire cette loi sous forme différentielle :

$$\boxed{\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \quad (3.5)$$

Nous supposons ici que le circuit  $C$  est immobile, c'est-à-dire qu'il ne se déplace pas dans le temps. Dans le cas contraire une force électromotrice supplémentaire peut venir du fait que les charges du fil conducteur subissent la force de Lorentz lorsque le fil se déplace.

Remarquons que le champ électrique induit par la variation du champ magnétique tend à produire un courant dont l'effet est de s'opposer, par le champ magnétique qu'il produit, à la variation du flux magnétique. C'est la loi de Lenz. Remarquons aussi que la force de Lorentz agissant sur une particule chargée est toujours perpendiculaire au champ magnétique; ce dernier ne peut donc produire un travail sur un ensemble de charges en mouvement. Cependant, une variation de ce champ magnétique dans le temps induit un champ électrique qui, lui, peut fournir un travail mécanique.

### 3.1.2 Inductance

Considérons une boucle  $C$  dans laquelle circule un courant  $I$ . Le champ magnétique produit par cette boucle dépend linéairement de  $I$ , ainsi bien sûr que le flux magnétique  $\Phi_B$  traversant la boucle et dû à son courant. On peut donc écrire la relation

$$\Phi_B = cLI \quad (3.6)$$

où  $L$  est l'*inductance* de la boucle, une quantité qui ne dépend que de la forme de la boucle (bien entendu,  $c$  est la vitesse de la lumière). Il s'ensuit que la f.é.m. produite par une variation du courant  $I$  de la boucle est

$$V = -L \frac{dI}{dt} \quad (3.7)$$

Considérons ensuite un système de  $N$  boucles  $C_i$ , portant des courants  $I_i$ . Le flux  $\Phi_B^{(i)}$  traversant la boucle  $C_i$  est une fonction linéaire des courants circulant dans toutes les boucles :

$$\Phi_B^{(i)} = c \sum_j M_{ij} I_j \quad (3.8)$$

Les coefficients  $M_{ij}$  sont les *coefficients d'inductance mutuelle*. Évidemment,  $M_{ii} = L_i$ . Donnons une expression générale pour ces coefficients, à partir de la loi de Biot et Savart sous la forme (2.8). Supposons que  $\mathbf{r}_i$  est la coordonnée d'un point sur la boucle  $C_i$ . Le potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)$  dû au courant circulant dans  $C_j$  est alors

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_i) = \frac{I_j}{c} \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{l}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (3.9)$$

où  $d\mathbf{l}_j$  est l'élément de longueur de la boucle  $C_j$  au point  $\mathbf{r}_j$ . D'après l'expression (3.3), le coefficient d'inductance mutuelle est alors

$$M_{ij} = \frac{1}{c^2} \oint_{C_{ij}} \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{l}_i \cdot d\mathbf{l}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (3.10)$$

Cette expression est également valide dans le cas  $i = j$ . On voit que l'inductance a les unités d'une accélération inverse.

Enfin, nous pouvons facilement démontrer que le travail nécessaire à la mise en place d'un courant  $I$  dans un circuit d'inductance  $L$  est égal à  $W = \frac{1}{2}LI^2$ . En effet, la puissance (travail par unité de temps) exercée par la f.é.m. induite est égal à  $P = VI = LI\dot{I}$ , ou encore  $P = \frac{1}{2}Ld(I^2)/dt$ . En intégrant par rapport au temps de  $I = 0$  jusqu'au courant final on obtient  $W = \frac{1}{2}LI^2$ . Ce travail a permis d'emmagasiner de l'énergie dans le champ magnétique produit par le circuit.

**Exemple 3.1:** *Inductance d'un tore carré.*

Calculer l'inductance d'un circuit formé par  $N$  enroulements d'un câble autour d'un tore à section carrée, de hauteur  $h$ , de rayon intérieur  $a$  et de rayon extérieur  $b$ .

*Solution :* Utilisons les coordonnées cylindriques, avec l'origine au centre du tore et à sa base. Appliquons la loi d'Ampère avec un contour circulaire de rayon  $r$  situé dans le tore. On obtient  $2\pi r B_\varphi = (4\pi/c)NI$ , ou  $B_\varphi = 2NI/cr$ . Le flux de  $\mathbf{B}$  à travers la section du tore est donc

$$\frac{2NI}{c} \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^h dz = \frac{2NI}{c} h \ln \frac{b}{a} \quad (3.11)$$

Le flux magnétique traversant le circuit est  $N$  fois ce résultat, en raison des  $N$  enroulements. L'inductance est donc

$$L = \frac{2N^2}{c^2} h \ln \frac{b}{a} \quad (3.12)$$

## 3.2 Équations de Maxwell

### 3.2.1 Courant de Déplacement

La loi d'Ampère doit être modifiée en présence de champs qui dépendent du temps, car en la prouvant à partir de la loi de Biot-Savart on a supposé que  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ . En fait, en prenant la divergence de la loi d'Ampère, on est forcé d'admettre que  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  puisque la divergence d'un rotationnel s'annule. Ceci ne peut plus être le cas quand  $\rho$  dépend du temps, en vertu de l'équation de continuité:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.13)$$

On suppose ici que la loi de Gauss est valide même quand la distribution de charge dépend du temps. C'est donc la quantité

$$\mathbf{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.14)$$

qui pourrait généraliser le courant dans la loi d'Ampère. Le deuxième terme s'appelle *courant de déplacement*. Cette modification a été apportée par Maxwell. On écrit alors la loi d'Ampère comme suit :

$$\boxed{\nabla \wedge \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}} \quad (3.15)$$

Comme illustration, considérons un circuit comprenant une capacité qui se charge. Il n'y a aucun courant de charge entre les plaques de la capacité, même si la circulation de  $\mathbf{H}$  est

visiblement non nulle. C'est le courant de déplacement (lié à l'augmentation de  $\mathbf{E}$  entre les plaques) qui contribue, par la loi d'Ampère, à la circulation de  $\mathbf{H}$ .

Dans un conducteur soumis à un champ sinusoïdal (fréquence  $\omega$ ) le courant de déplacement vaut environ  $\omega/\sigma$  fois  $\mathbf{J}$ . C'est une fraction appréciable du courant de charge aux fréquences élevées ( $\omega \sim \sigma$ ).

### 3.2.2 Équations de Maxwell

La dynamique ne modifie pas ni la loi de Gauss ni l'inexistence de monopôles magnétiques. Pour se convaincre de ce dernier point, remarquons que, d'après la loi de Faraday,

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} = -c \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E}) = 0 \quad (3.16)$$

ce qui implique que  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  est indépendant du temps. On peut maintenant imaginer qu'une distribution arbitraire de courants  $\mathbf{J}(t)$  soit issue d'une distribution stationnaire à un temps reculé  $t_0$ . Comme  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  partout au temps  $t_0$ , il s'ensuit que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  en tout temps. La généralisation des équations de l'électro-magnétisme statique à l'électrodynamique est donc fournie par les *équations de Maxwell*:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 & \nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{array}} \quad (3.17)$$

#### Remarques

1. Il s'agit d'un ensemble de 8 équations du premier ordre, couplées, pour les 12 quantités  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$ . Pour qu'une solution soit possible, il faut également fournir des *équations d'état*:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}[\mathbf{E}] \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}[\mathbf{B}] \quad (3.18)$$

qui expriment les champs macroscopiques  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$  en fonction des champs fondamentaux  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ .

2. L'équation de continuité est une conséquence des équations de Maxwell.
3. En fonction des champs fondamentaux ( $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ ) et des courants et charge totaux, les équations de Maxwell prennent la forme suivante

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_{\text{tot.}} & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 & \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{tot.}} \end{array}} \quad (3.19)$$

4. dans le vide ( $\rho_{\text{tot.}} = 0$  et  $\mathbf{J}_{\text{tot.}} = 0$ ), il y a symétrie de dualité par rapport à l'échange

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B} \quad \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E} \quad (3.20)$$

Toute solution des équations de Maxwell dans le vide devra refléter cette symétrie.

### 3.3 Potentiels électromagnétiques

Dans le cas statique, nous avons introduit les potentiels scalaire et vecteur en vertu des équations statiques  $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$  et  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Dans le cas dynamique il est encore possible de définir ces potentiels, avec modification :

1. Puisque  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  est encore nul, on peut encore définir le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  tel que  $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$  (cf. Théorème de Helmholtz en appendice).
2. La loi de Faraday s'écrit alors

$$\nabla \wedge \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.21)$$

Ce qui nous permet de définir le potentiel scalaire  $\Phi$  comme satisfaisant la relation suivante avec le potentiel vecteur :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \wedge \mathbf{A} \end{aligned}} \quad (3.22)$$

#### 3.3.1 Transformations de jauge

La correspondance entre les champs et les potentiels n'est pas univoque. On peut modifier les potentiels par une *transformation de jauge* sans modifier les champs :

$$\boxed{\Phi \rightarrow \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \xi} \quad (3.23)$$

Ceci se vérifie aisément puisque  $\nabla \wedge \nabla = 0$  et que les deux dérivées de  $\xi$  s'annulent mutuellement dans  $\mathbf{E}$ .

La non unicité des potentiels nous permet d'imposer des conditions sur ces derniers sans que cela ne restreigne les champs. On désigne ces conditions sous le nom de *gauges*:

1. *Jauge de Lorentz*: on impose la condition

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (3.24)$$

Si les potentiels ne satisfont pas à cette condition, alors il est toujours possible de trouver une transformation de jauge (c.-à-d. une fonction  $\xi$ ) telle que les nouveaux potentiels  $\mathbf{A}'$  et  $\Phi'$  y satisfassent. En effet, on a

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2 \xi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (3.25)$$

Il suffit alors de résoudre l'équation d'onde avec source pour  $\xi$  pour trouver une solution à la condition de Lorentz. La condition de Lorentz ne fixe pas les potentiels de façon unique puisqu'une transformation de jauge telle que

$$\nabla^2 \xi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.26)$$

n'affecte pas la condition de Lorentz.

2. *Jauge de Coulomb* ou *transverse*: on impose la condition

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.27)$$

Pour satisfaire cette condition à l'aide d'une transformation de jauge et à partir d'un potentiel  $\mathbf{A}$  quelconque, il suffit de résoudre l'équation de Poisson :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \xi \Rightarrow \xi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.28)$$

Dans le cas statique, ces deux jauges sont bien sûr équivalentes.

### 3.3.2 Couplage minimal

Il a été démontré précédemment (p. 53) que la force de Lorentz pouvait être décrite dans le formalisme Lagrangien en adoptant la forme (2.24) comme lagrangien. La démonstration de cette équivalence n'est que légèrement modifiée dans le cas où les potentiels dépendent du temps et est laissée en exercice. L'hamiltonien d'une particule chargée dans un champ magnétique prend alors toujours la forme suivante :

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 + q\Phi(\mathbf{r}, t) \quad (3.29)$$

En mécanique quantique, cet hamiltonien peut être utilisé tel quel, sauf que  $\mathbf{p}$  devient l'opérateur différentiel  $-i\hbar\nabla$ . L'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r}, t)$  est alors

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} [\nabla - (iq/\hbar c) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 \psi + q\Phi(\mathbf{r}, t) \psi \quad (3.30)$$

Une question se pose immédiatement : étant donné que ce sont les potentiels qui apparaissent dans cet hamiltonien et non les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ , est-ce que l'équation de Schrödinger est affectée par les transformations de jauge? La réponse à cette question est qu'on peut étendre la définition d'une transformation de jauge en incluant une multiplication de la fonction d'onde  $\psi$  par une phase  $e^{iq\xi/\hbar c}$  et que l'équation de Schrödinger est alors invariante lors d'une transformation de jauge :

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \nabla \xi \\ \psi &\rightarrow e^{iq\xi/\hbar c} \psi \end{aligned} \quad (3.31)$$

Pour démontrer ce fait plus aisément, il est commode de définir les opérateurs différentiels suivants, qu'on appelle *dérivées covariantes*:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar} \Phi \\ \mathcal{D} &\equiv \nabla - \frac{iq}{\hbar c} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.32)$$

En fonction de ces opérateurs différentiels, l'équation de Schrödinger prend la forme suivante :

$$i\hbar \mathcal{D}_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \mathcal{D}^2 \psi \quad (3.33)$$

La propriété principale des dérivées covariantes est la *covariance* sous transformation de jauge, c'est-à-dire que, lors d'une transformation de jauge, les dérivées covariantes sont modifiées par un simple facteur de phase local :

$$\mathcal{D}_t\psi \rightarrow e^{iq\xi/\hbar c}\mathcal{D}_t\psi \quad \mathcal{D}\psi \rightarrow e^{iq\xi/\hbar c}\mathcal{D}\psi \quad (3.34)$$

Il est alors manifeste que l'équation de Schrödinger est invariante lors des transformations de jauge. Le fait crucial ici est que la phase qui multiplie  $\psi$  dépend de  $\mathbf{r}$  et de  $t$ . On sait qu'en mécanique quantique la fonction d'onde peut être multipliée par une phase *globale* sans en modifier le sens physique. On apprend ici que la fonction d'onde d'une particule chargée peut être multipliée par une phase *locale* sans non plus modifier son sens physique, pourvu que cette multiplication s'accompagne d'un changement des potentiels électromagnétiques, tel qu'en l'Éq. (3.31). Le fait de pouvoir transformer une invariance globale en invariance local grâce à la présence de potentiels scalaire et vecteur est à la base des *théories de jauge* qui décrivent les interactions forte (QCD), faible et électromagnétique.

### 3.3.3 Équation du mouvement pour les potentiels

Substituons les potentiels dans les équations de Maxwell. On trouve

$$\nabla^2\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A} = -4\pi\rho \quad (3.35)$$

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \quad (3.36)$$

On s'est servi de l'identité

$$\nabla\wedge(\nabla\wedge\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \quad (3.37)$$

Dans la jauge de Lorentz, ces équations prennent la forme suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho \\ \nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \end{aligned}} \quad (3.38)$$

Il s'agit de l'équation d'onde avec sources.

Dans la jauge de Coulomb, la première équation devient

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho \quad (3.39)$$

Ce qui mène à la solution électrostatique qu'on connaît (potentiel instantané):

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.40)$$

(en l'absence de sources, on peut donc prendre  $\Phi = 0$ ). L'équation (3.36) devient alors

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (3.41)$$

Le dernier terme annule la partie longitudinale du courant, car on a

$$4\pi\mathbf{J}_l = -\nabla \int d^3r' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.42)$$

alors que l'équation de continuité appliquée au dernier terme donne

$$\nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\nabla \int d^3r' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.43)$$

On peut donc écrire

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_t \quad (3.44)$$

où la source de  $\mathbf{A}$  est la partie transverse du courant, d'où l'autre nom de la jauge.

Dans le cas statique, les deux ensembles d'équations sont équivalents :

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho \quad \text{et} \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (3.45)$$

(le courant est toujours transverse dans ce cas) Les solutions sont bien sûr celles que l'on connaît.

### 3.4 Énergie du champ électromagnétique

Dans cette section nous voulons démontrer le *théorème de Poynting*, qui stipule que la densité d'énergie du champ électromagnétique est donnée par l'expression

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (3.46)$$

alors que le flux d'énergie (le courant associé à la densité  $\mathcal{E}$ ) est donné par le *vecteur de Poynting*:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \quad (3.47)$$

Le vecteur  $\mathbf{S}$  représente la quantité d'énergie passant par unité de temps et de surface à travers un élément de surface perpendiculaire à  $\mathbf{S}$ . Le théorème de Poynting tel que formulé ici n'est valable que pour un matériau linéaire.

Pour démontrer ce théorème, considérons premièrement le travail effectué sur les charges et les courants d'un système fermé. La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique des particules matérielles chargées (c'est-à-dire la puissance) est

$$\frac{dK}{dt} = \int_V d^3r \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (3.48)$$

Cette relation se démontre en considérant la forme explicite de la densité de courant pour des particules ponctuelles. On trouve

$$\int_V d^3r \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{E} = \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{F}_i \quad (3.49)$$



où  $\mathbf{F}_i$  est la force de Lorentz agissant sur la particule  $i$ . La force magnétique est orthogonale à la vitesse et donc n'effectue aucun travail sur les charges en mouvement.

Substituons pour  $\mathbf{J}$  son expression tirée de la loi d'Ampère :

$$\frac{dK}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int_V d^3r \left( \nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} \quad (3.50)$$

Utilisons ensuite la relation suivante :

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \wedge \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \wedge \mathbf{H} = -\frac{1}{c} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \nabla \wedge \mathbf{H} \quad (3.51)$$

où nous avons utilisé la loi de Faraday dans la dernière équation. En substituant pour  $\mathbf{E} \cdot \nabla \wedge \mathbf{H}$ , on trouve

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \int_V d^3r \left( \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) - \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{S} \quad (3.52)$$

Le dernier terme peut être transformé en intégrale de surface. Supposons maintenant que le milieu considéré est linéaire, de sorte que  $\mathbf{H}$  est proportionnel à  $\mathbf{B}$  en tout temps, comme  $\mathbf{D}$  est proportionnel à  $\mathbf{E}$ . Le premier terme peut alors s'écrire comme une dérivée. On trouve finalement

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ K + \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \right\} = - \oint_S \mathbf{da} \cdot \mathbf{S} \quad (3.53)$$

où la surface  $S$  délimite le volume  $V$ . Il s'agit de l'expression de la conservation de l'énergie : la variation d'énergie totale (énergie cinétique plus énergie du champ) à l'intérieur du volume  $V$  se reflète exactement par le flux d'énergie qui sort du volume  $V$ , à travers la surface  $S$ .

Notons que le théorème de Poynting peut aussi s'écrire de façon différentielle :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (3.54)$$

Dans un milieu conducteur, ceci devient

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\sigma \mathbf{E}^2 \quad (3.55)$$

Le terme de droite, avec son signe négatif, représente les pertes d'énergie causées par la résistance du conducteur.

Le vecteur de Poynting n'est pas seulement égal au flux d'énergie du champ : il est aussi proportionnel à la *densité d'impulsion* associée au champ électromagnétique . On montre que cette densité d'impulsion, dans le vide, est précisément donnée par  $\mathbf{S}/c^2$ .

## 3.5 Ondes Électromagnétiques

La conséquence la plus spectaculaire des travaux de Maxwell est la réduction de l'optique à une application des lois de l'électrodynamique. En effet, les équations de Maxwell ont comme solution particulière des ondes se déplaçant à la vitesse  $c$ . Ces *ondes électromagnétiques* sont rendues possibles par l'existence du courant de déplacement, introduit par Maxwell. Comme leur vitesse coïncide avec celle de la lumière dans le vide, Maxwell a justement supposé que la lumière n'était qu'une onde de déformation des champs électrique et magnétique. Quelques vingt ans après cette hypothèse, H. Herz a le premier produit et détecté des ondes électromagnétiques par des moyens électriques purement macroscopiques et a ainsi confirmé la validité de la théorie de Maxwell aux yeux de la communauté scientifique.

Dans cette section, nous établirons l'équation d'onde dans le vide à partir des équations de Maxwell en l'absence de charges et de courants et nous décrirons la solution générale de cette équation. Ensuite, nous décrirons sommairement comment on peut émettre des ondes électromagnétiques à l'aide d'une distribution de courant oscillante (rayonnement dipolaire). Une description plus détaillée des ondes électromagnétiques et de leur rayonnement sera l'objet de chapitres ultérieurs.

### 3.5.1 Équation d'Onde et Solution de d'Alembert

Nous avons vu précédemment que, dans la jauge de Lorentz, les potentiels électromagnétiques obéissent à l'équation d'onde [Eq. (3.38)]. Nous allons maintenant montrer que, en l'absence de charges et de courants, le champ électrique satisfait à l'équation d'onde :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.56)$$

À cette fin, écrivons les équations de Maxwell dans le vide, en l'absence de sources :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 & \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Prenons le rotationnel de la loi de Faraday :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \wedge \mathbf{B} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (3.58)$$

Dans le dernier terme nous avons utilisé la loi d'Ampère. Puisque  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , on obtient l'équation d'onde (3.56) pour  $\mathbf{E}$ . En prenant plutôt le rotationnel de la loi d'Ampère et en utilisant la loi de Faraday dans le dernier terme, on trouverait la même équation d'onde, mais en fonction du champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

Une solution de l'équation d'onde a été proposée par d'Alembert dans le cas des ondes planes, c'est-à-dire quand les champs ne varient que dans une direction, disons l'axe des  $x$ . L'équation d'onde devient alors (pour  $\mathbf{E}$ )

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.59)$$

Définissons les variables  $u_1 = x - ct$  et  $u_2 = x + ct$  dont les opérateurs de dérivées sont

$$\frac{\partial}{\partial u_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad \frac{\partial}{\partial u_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (3.60)$$

L'équation d'onde devient alors

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial u_1 \partial u_2} = 0 \quad (3.61)$$

La solution à cette équation s'écrit immédiatement :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1(u_1) + \mathbf{E}_2(u_2) \\ &= \mathbf{E}_1(x - ct) + \mathbf{E}_2(x + ct) \end{aligned} \quad (3.62)$$

soit la somme de deux ondes se propageant à la vitesse  $c$ , mais dans des directions opposées : positive pour  $\mathbf{E}_1$  et négative pour  $\mathbf{E}_2$ . Les fonctions  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$  ne sont pas contraintes davantage par l'équation d'onde. Autrement dit, l'onde progressive a une forme quelconque, pas nécessairement sinusoïdale. Cette onde conservera sa forme au cours de la propagation (pas de dispersion), ce qui est caractéristique d'une solution de l'équation d'onde.

Comme l'équation d'onde est linéaire, la solution générale de l'équation d'onde en trois dimensions est une superposition d'ondes planes quelconques se propageant dans des directions arbitraires. Il s'agit bien sûr d'une solution décrite par un nombre infini de paramètres. Notons cependant que l'équation d'onde ne suffit pas à déterminer complètement le champ  $\mathbf{E}$ , puisqu'il y a plus d'information dans l'ensemble des équations de Maxwell que dans la seule équation d'onde.

### 3.5.2 Ondes monochromatiques

Habituellement, on s'intéresse aux ondes monochromatiques qui oscillent à une fréquence bien déterminée. À l'origine ( $\mathbf{r} = 0$ ), le champ électrique sera représenté par la partie réelle d'une exponentielle complexe :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} = 0, t) = \text{Re } \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (3.63)$$

où  $\mathbf{E}_0$  est l'*amplitude* de l'onde, en général un nombre complexe. Si l'onde se propage dans la direction  $+x$ , alors on peut obtenir sa dépendance en  $x$  en remplaçant  $t$  par  $t - x/c$  dans l'expression ci-haut pour obtenir

$$\mathbf{E}(x, t) = \text{Re } \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad k = \omega/c \quad (3.64)$$

Une onde plane se déplaçant dans une direction quelconque s'écrit plutôt comme ceci :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re } \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad |\mathbf{k}| = \omega/c \quad (3.65)$$

Le vecteur  $\mathbf{k}$  est le *vecteur d'onde*, sa grandeur  $k = |\mathbf{k}|$  est le *nombre d'onde* et son inverse est proportionnel à la *longueur d'onde*:  $\lambda = 2\pi/k$ .

En appliquant la loi de Gauss  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  à l'onde (3.65), on trouve  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ , c'est-à-dire que le champ électrique est perpendiculaire au vecteur d'onde (c'est-à-dire à la direction de propagation). D'autre part, la loi de Faraday nous permet de retrouver le champ magnétique associé à cette onde :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \implies \quad i\mathbf{k} \wedge \mathbf{E} - i\frac{\omega}{c} \mathbf{B} = 0 \quad (3.66)$$

(le champ magnétique associé oscille bien sûr à la même fréquence  $\omega$ ). On trouve donc

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E} \quad \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad (3.67)$$

En conclusion, dans une onde électromagnétique plane se propageant dans le vide, les vecteurs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{k}$  sont mutuellement perpendiculaires et les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  ont la même amplitude et la même phase. Les ondes électromagnétiques sont donc transversales et non longitudinales, car les quantités oscillantes sont perpendiculaires à la direction de propagation. Les ondes électromagnétiques de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  existent donc en deux *polarisations* possibles.

Signalons que toute onde électromagnétique peut être considérée comme une superposition linéaire d'ondes planes de vecteurs d'ondes différents. La solution générale à l'équation d'onde dans le vide est donc de la forme suivante :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (3.68)$$

où  $\mathbf{E}_0(\mathbf{k})$  est une amplitude qui dépend du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ .

Notons que tout ceci peut changer lorsqu'on considère des ondes électromagnétiques se propageant dans des milieux matériels. Les amplitudes des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  ne sont alors plus les mêmes et leurs phases peuvent être différentes si le milieu absorbe progressivement l'onde. D'autre part, la vitesse de phase  $\omega/k$  dépend alors de la fréquence et est généralement plus petite que  $c$ . Ceci mène au phénomène de *dispersion*, par lequel une onde non sinusoïdale (un paquet d'onde) change de forme au cours de sa propagation.

### 3.5.3 Densité et flux d'énergie

Considérons la densité et le flux d'énergie associés à une onde électromagnétique de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Décomposons l'amplitude de l'onde plane en ses parties réelle et imaginaire :  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2$  et  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_1 + i\mathbf{B}_2$ , où  $\mathbf{E}_{1,2}$  et  $\mathbf{B}_{1,2}$  sont des vecteurs *réels*. À une position donnée, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{Re} (\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2)e^{-i\omega t} = \mathbf{E}_1 \cos \omega t - \mathbf{E}_2 \sin \omega t \\ \mathbf{B} &= \text{Re} (\mathbf{B}_1 + i\mathbf{B}_2)e^{-i\omega t} = \mathbf{B}_1 \cos \omega t - \mathbf{B}_2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (3.69)$$

La densité d'énergie est alors

$$\frac{1}{8\pi} \{(\mathbf{E}_1 \cos \omega t - \mathbf{E}_2 \sin \omega t)^2 + (\mathbf{B}_1 \cos \omega t - \mathbf{B}_2 \sin \omega t)^2\} \quad (3.70)$$

En développant le carré et en prenant la moyenne temporelle, on obtient

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{16\pi} (\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 + \mathbf{B}_1^2 + \mathbf{B}_2^2) \quad (3.71)$$

où nous avons utilisé les moyennes

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} \quad \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0 \quad (3.72)$$

En fonction de l'amplitude complexe  $\mathbf{E}_0$ , cette formule peut aussi s'écrire

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* \quad (3.73)$$

Une formule analogue s'obtient pour le vecteur de Poynting moyen  $\langle \mathbf{S} \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{c}{4\pi} \langle (\mathbf{E}_1 \cos \omega t + \mathbf{E}_2 \sin \omega t) \wedge (\mathbf{B}_1 \cos \omega t + \mathbf{B}_2 \sin \omega t) \rangle \\ &= \frac{c}{8\pi} (\mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{B}_1 + \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{B}_2) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Ce qui peut aussi s'écrire

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \text{Re} (\mathbf{E}_0 \wedge \mathbf{B}_0^*) = \frac{c}{8\pi} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) \hat{\mathbf{k}} = \langle \mathcal{E} \rangle c \hat{\mathbf{k}} \quad (3.75)$$

Cette dernière relation signifie que le flux d'énergie provient de la densité d'énergie  $\mathcal{E}$  se propageant à la vitesse  $c$ .

### 3.5.4 Rayonnement dipolaire

Dans cette section nous allons voir comment une distribution de courant qui oscille dans le temps émet des ondes électromagnétiques. Le point de départ de notre analyse est l'équation d'onde avec source pour le potentiel vecteur, dans la jauge de Lorentz :

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (3.76)$$

Résoudre cette équation requiert une analyse un peu détaillée que nous ne pouvons faire ici. Indiquons simplement la solution :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.77)$$

La caractéristique principale de cette solution est qu'elle ressemble fort à celle qu'on aurait si la densité de courant  $\mathbf{J}$  était indépendante du temps [Éq. (2.8)], sauf que la densité de courant qui figure dans l'intégrale n'est pas prise au temps d'observation  $t$ , mais au *temps retardé*  $t'$ :

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \quad (3.78)$$

En fait,  $t'$  précède  $t$  par le temps que prendrait un signal lumineux pour se rendre du point de source  $\mathbf{r}'$  au point d'observation  $\mathbf{r}$ . Le potentiel (3.77) porte par conséquent le nom de *potentiel retardé*. Mise à part cette différence, d'ailleurs prévisible et très plausible, le potentiel (3.77) a la même allure que son vis-à-vis statique (2.8).

Supposons maintenant que la densité de courant oscille dans le temps à une fréquence  $\omega$ :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (3.79)$$

En substituant dans le potentiel retardé (3.77), on trouve

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{c} \int d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.80)$$

et l'intégration est prise sur la région qui contient les charges en mouvement.

Il y a ici deux longueurs caractéristiques : la dimension  $d$  du système radiant (longueur de l'antenne, par exemple) et la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$  du rayonnement. Nous allons supposer que le point d'observation est très éloigné:  $r \gg d$  et  $r \gg \lambda$ . On dit alors que l'observateur se situe dans la *zone de rayonnement*. Prenons l'origine des coordonnées au centre de la source des courants. Si  $\mathbf{n}$  est le vecteur unité dans la direction du point d'observation et  $r$  la distance à l'origine, on peut faire l'approximation suivante suffisamment loin des sources :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' \quad (3.81)$$

On écrit donc

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'} \quad (3.82)$$

Nous allons aussi faire l'approximation que la dimension  $d$  du système radiant est beaucoup plus petite que la longueur d'onde du rayonnement, de sorte que  $k\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'$  est toujours très petit dans la région où  $\mathbf{J}$  est appréciable. On peut alors remplacer l'exponentielle par l'unité. Cette approximation porte le nom d'*approximation dipolaire*, pour une raison qui deviendra bientôt claire. On écrit donc

$$\mathbf{A}_{\text{dip.}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \quad (3.83)$$

Dans la section 2.3.1 nous avons montré que cette intégrale s'annule dans une situation statique. Dans une situation dynamique, ce n'est plus le cas. En effet,

$$\int d^3r J_k(\mathbf{r}) = - \int d^3r \partial_i J_i x_k = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) x_k = -i\omega d_k \quad (3.84)$$

où  $\mathbf{d}$  est le moment dipolaire de la distribution de charge qui accompagne nécessairement la distribution de courant et qui oscille à la même fréquence :

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 e^{-i\omega t} \quad (3.85)$$

Le potentiel vecteur dipolaire peut donc s'écrire

$$\mathbf{A}_{\text{dip.}}(\mathbf{r}) = -ik \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{d} \quad (k = \omega/c) \quad (3.86)$$

On peut maintenant calculer le champ magnétique associé:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \wedge \mathbf{A} = -ik \nabla (e^{ikr}/r) \wedge \mathbf{d} \quad (3.87)$$

Cependant,

$$\nabla (e^{ikr}/r) = (ikr - 1) \frac{e^{ikr}}{r^2} \mathbf{n} \quad (3.88)$$

Dans la zone de rayonnement, le premier terme de la parenthèse domine et on peut négliger le deuxième. Donc

$$\mathbf{B} = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{n} \wedge \mathbf{d} \quad (3.89)$$

Le champ électrique s'obtient facilement du champ magnétique en observant que, dans la zone de rayonnement, on a localement affaire à une onde plane de vecteur d'onde  $k\mathbf{n}$  et par conséquent

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{n} = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\mathbf{d} - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) \quad (3.90)$$

Observons que le champ électrique est bien sûr perpendiculaire à  $\mathbf{n}$  et orienté dans le plan commun à  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{d}$ .

L'énergie transportée par cette onde peut être calculée à l'aide du vecteur de Poynting moyenné dans le temps :

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{n} \quad (3.91)$$

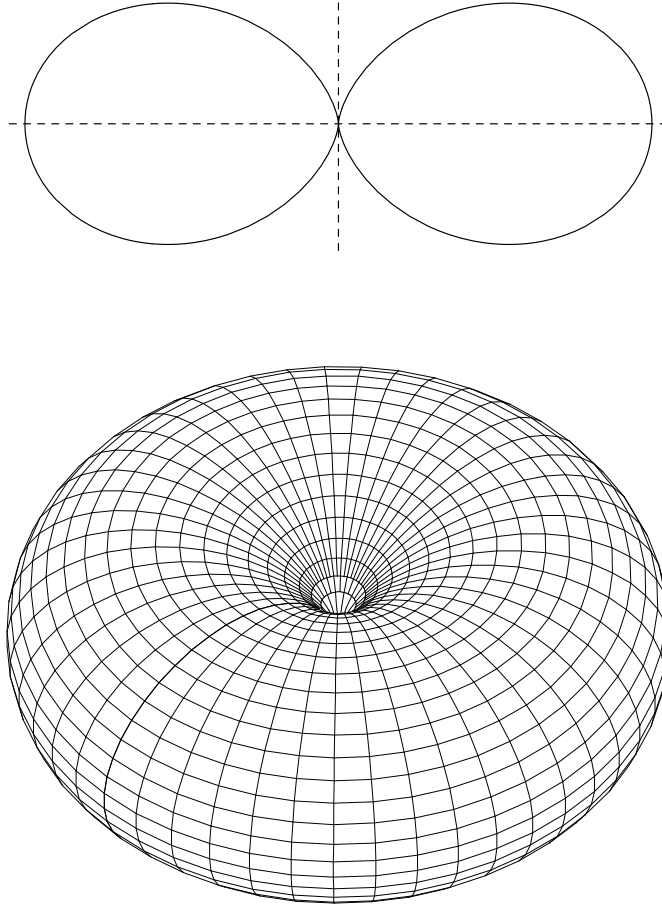


Figure 3.1. Patron de rayonnement dipolaire : coupe à angle  $\varphi$  fixe et vue tridimensionnelle

La puissance rayonnée par angle solide est alors

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \rangle = \frac{c}{8\pi} k^4 |\mathbf{d}_0|^2 \sin^2 \theta \quad (3.92)$$

où  $\theta$  est l'angle entre  $\mathbf{n}$  et le moment dipolaire  $\mathbf{d}$ . Aucun rayonnement n'est émis dans la direction du dipôle ( $\theta = 0$ ) et le rayonnement est maximal dans le plan perpendiculaire au dipôle ( $\theta = 90^\circ$ ). La puissance totale rayonnée est

$$P = \frac{c}{8\pi} k^4 d_0^2 \int d\Omega \sin^2 \theta = \frac{ck^4}{3} d_0^2 \quad (3.93)$$

La dépendance en fréquence de la puissance rayonnée ( $P \sim \omega^4$ ) est à la base de l'explication donnée par Rayleigh de la couleur bleue du ciel. L'argument est le suivant. La lumière solaire est incidente sur les molécules de l'atmosphère et le champ électrique oscillant de la lumière entraîne un mouvement oscillant des nuages électroniques de ces molécules. Les molécules développent donc un moment dipolaire électrique induit qui oscille à la fréquence  $\omega$  de l'onde incidente. Ce mouvement oscillant émet à son tour de la lumière, l'énergie nécessaire provenant justement de la lumière incidente. Il y a donc *diffusion* de la lumière solaire par les molécules de l'atmosphère. Cette diffusion se fait principalement dans la direction perpendiculaire au champ électrique

de la lumière incidente et est proportionnelle à  $\omega^4$ . Par conséquent, la lumière bleue est plus efficacement diffusée que la lumière rouge (environ 5 fois plus) et le ciel apparaît bleu, puisque la lumière nous provenant du ciel est essentiellement la lumière solaire diffusée par l'atmosphère. En contrepartie, plus la distance parcourue dans l'atmosphère par la lumière qui nous parvient directement du Soleil est grande, plus sa composante bleue est faible (elle a été diffusée) et plus le Soleil apparaît rougeâtre. Ceci explique la couleur du Soleil couchant et son apparence rougeâtre encore plus prononcée lorsque l'atmosphère est humide ou polluée (les particules en suspension et les gouttelettes d'eau sont d'excellent diffuseurs).

### 3.5.5 Formule de Larmor

Considérons une charge ponctuelle  $e$  en oscillation à une fréquence  $\omega$  autour d'une position d'équilibre. Sa position est donnée par

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t} \quad (3.94)$$

(il est sous-entendu que nous prenons la partie réelle des quantités complexes). Cette particule ponctuelle constitue à elle seule une distribution de charge, avec moments dipolaire, quadrupolaire, etc. En particulier, le moment dipolaire de cette distribution oscille dans le temps à une fréquence  $\omega$ :

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 e^{-i\omega t} \quad \mathbf{d}_0 = e \mathbf{r}_0 \quad (3.95)$$

On peut donc supposer que cette particule émet un rayonnement dipolaire. En fait, la forme précise de son rayonnement ne sera pas exactement donnée par la formule (3.92): celle-ci ne sera correcte que dans la limite où  $|\mathbf{r}_0|\omega \ll c$ . D'après la formule (3.93), la puissance totale rayonnée par cette particule est

$$P = \frac{ck^4}{3} d_0^2 = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \quad (3.96)$$

où  $a = \omega^2 r_0 / \sqrt{2}$  est l'accélération quadratique moyenne de la particule dans son mouvement d'oscillation. Il se trouve que cette formule est beaucoup plus générale que ce qui est impliqué ici. Elle donne la puissance rayonnée par une particule chargée d'accélération instantanée  $a$  et porte le nom de *formule de Larmor*:

$$P = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \quad (3.97)$$

Sous cette forme, cependant, elle n'est valable que pour une particule non relativiste.

## Appendice 3.A

### Théorème de Helmholtz

*Un champ vectoriel  $\mathbf{F}$  fini et continu qui s'annule à l'infini peut être exprimé comme la somme d'un gradient et d'un rotationnel :*

$$\mathbf{F} = \nabla\phi + \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (3.98)$$

Pour prouver ce théorème, il faut obtenir une expression pour  $\phi$  et  $\mathbf{A}$  en fonction de  $\mathbf{F}$ . Pour ce faire, définissons le champ  $\mathbf{W}$  suivant :

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.99)$$



Il s'ensuit, d'après ce que l'on sait de l'équation de Poisson, que

$$\nabla^2 \mathbf{W} = -\mathbf{F} \quad (3.100)$$

Il suffit alors de poser

$$\phi = -\nabla \cdot \mathbf{W} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{W} \quad (3.101)$$

Alors

$$\mathbf{F} = -\nabla^2 \mathbf{W} = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{W}) + \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{W}) = \nabla \phi + \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (3.102)$$

Ceci prouve le théorème.

On peut exprimer directement  $\phi$  et  $\mathbf{A}$  en fonction de la divergence et du rotationnel de  $\mathbf{F}$ :

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.103)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\nabla' \wedge \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.104)$$

Le champ  $\mathbf{F}$  peut donc être décomposé en une somme de deux termes :  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t$ , où  $\mathbf{F}_l = \nabla \phi$  est la partie longitudinale (irrotationnelle) et  $\mathbf{F}_t = \nabla \wedge \mathbf{A}$  la partie transverse (sans divergence). Si un champ  $\mathbf{F}$  est sans divergence, on conclut donc que seul  $\mathbf{F}_t$  est non nul, alors que si  $\mathbf{F}$  est irrotationnel, seul  $\mathbf{F}_l$  est non nul.

## Problèmes

### Problème 3.1

Quelles raisons ont motivé les corporations distribuant de l'énergie électriques à adopter le système de courant alternatif, par opposition à celui de courant continu défendu par Edison? Pourquoi le courant est-il triphasé?

### Problème 3.2

Considérez une boucle  $C$  dans laquelle circule un courant  $I$ , qu'on déplace de manière rigide avec une vitesse  $\mathbf{v}$  dans un champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ . En considérant la force de Lorentz agissant sur la charge en mouvement dans chaque élément de circuit, démontrez que la f.é.m. causée par ce mouvement est donnée par

$$V = \frac{1}{c} \oint_C d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (3.105)$$

Cette force électromotrice est également présente dans le référentiel qui se déplace avec la boucle. À quoi serait alors due cette f.é.m., alors que la vitesse de la boucle est nulle dans ce référentiel?

### Problème 3.3

Une coquille sphérique mince de rayon  $a$  fait d'un matériau conducteur est en rotation autour de l'axe  $z$  avec une vitesse angulaire  $\omega$ . Cette coquille est placée dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ . Calculez la force électromotrice induite entre le pôle nord et l'équateur de la coquille.

**Problème 3.4**

Un transformateur primitif est fait d'une pièce de fer doux (un matériau ferromagnétique de très grande perméabilité et de faible hystérèse) ayant la forme d'un tore ou d'une barre repliée sur elle-même. Deux circuits (un primaire et un secondaire) s'enroulent autour de ce tore, avec respectivement  $N_1$  et  $N_2$  tours. Expliquez comment transformer les tensions avec un tel dispositif et expliquez le rôle du fer doux.

**Problème 3.5**

Soit un long câble coaxial formé de deux cylindres conducteurs concentriques de rayons  $a$  et  $b$  respectivement ( $a < b$ ). Il s'agit d'un circuit dont l'une des composantes entoure l'autre complètement (on suppose que les deux cylindres sont reliés entre eux à l'extrémité du câble).

- a) En supposant que l'épaisseur de ces cylindres est négligeable, calculez l'inductance par unité de longueur de ce câble.
- b) Répétez le calcul, mais cette fois en supposant que le cylindre intérieur est plein et que le courant s'y distribue de façon uniforme.
- c) Avec les données de (a), calculez l'énergie magnétique de deux façons : par la formule  $U = \frac{1}{2}LI^2$  et par l'intégration directe de la densité d'énergie magnétique, et montrez que les résultats coïncident.

# Relativité Restreinte

## 4.1 Transformations de Lorentz

### 4.1.1 Principe de la relativité restreinte

Toute description quantitative d'un phénomène physique se fait dans le cadre d'un certain *référentiel*, c'est-à-dire d'un système de coordonnées pour l'espace et le temps. Un référentiel est dit *inertiel* si un objet ou particule qui n'interagit pas avec d'autres corps (i.e. ne subit aucune 'force') se déplace en mouvement rectiligne uniforme, c'est-à-dire avec une vitesse constante. Cette définition est bien sûr une abstraction, car il est en pratique impossible d'isoler un objet complètement; il est cependant possible de réaliser ces conditions approximativement, en supposant que les interactions de toute provenance décroissent avec la distance (localité). Différents référentiels inertiels se meuvent à des vitesses uniformes les uns par rapport aux autres. Le référentiel particulier dans lequel un objet est au repos est qualifié de *référentiel propre* à cet objet.

Le principe de la relativité restreinte stipule que les lois de la physique devraient être les mêmes dans tous les référentiels inertiels. En d'autres termes, il n'y a pas de *référentiel privilégié* (!) qu'on puisse considérer comme particulièrement important, dans lequel les lois de la physique devraient être formulées. Comme la vitesse de propagation de la lumière dans le vide est une constante  $c$  qui entre dans les lois mêmes de l'électromagnétisme (les équations de Maxwell), le principe de relativité demande que la lumière se propage avec la même vitesse dans tous les référentiels inertiels.

Ceci est naturellement en contradiction avec la relativité Galiléenne. Les théories pré-électromagnétiques de la propagation des ondes supposaient toujours qu'il existe un milieu dans lequel les ondes doivent se propager, par analogie avec les ondes sonores et les vagues sur l'eau. Ainsi ces théories ont imaginé un milieu de propagation hypothétique : l'*éther*. Cet éther devait être au repos dans un référentiel particulier. À moins que la Terre, par une étrange coïncidence, soit au repos dans l'éther, la vitesse de propagation de la lumière devrait dépendre de la direction de propagation. L'expérience de Michelson et Morley a démontré le contraire. Une porte de sortie consiste à supposer que la Terre et tous les corps célestes entraînent l'éther avec eux; l'éther est alors un fluide mobile, au repos uniquement *en moyenne*. Cette explication de type 'épicycle' échoue après un examen plus approfondi. Le principe de relativité est donc avant tout fondé sur l'*expérience*: l'absence de repère privilégié pour la propagation de la lumière démontre que tous les repères inertiels sont équivalents.

### 4.1.2 Transformations de Lorentz

Le passage d'un référentiel à un autre se fait par un changement de coordonnées impliquant les trois coordonnées spatiales et le temps. Considérons deux référentiels  $S$  et  $S'$  se déplaçant l'un par rapport à l'autre à une vitesse  $\mathbf{v}$ . Choisissons nos axes de telle sorte que  $\mathbf{v}$  soit selon l'axe des  $x$ :  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$ . On cherche une transformation

$$x'_i = f_i(x, y, z, t) \quad t' = g(x, y, z, t) \quad (4.1)$$

compatible avec le principe de relativité, i.e., telle que la vitesse de propagation de la lumière soit la même dans les deux référentiels.

1. Cette transformation doit être linéaire, sinon un corps au repos dans  $S$  ne serait pas en mouvement rectiligne uniforme dans  $S'$ . Les fonctions  $f_i$  et  $g$  ci-haut sont donc linéaires en  $x_i$  et  $t$ .
2. Les coordonnées perpendiculaires à la vitesse relative  $\mathbf{v}$  peuvent être dénotées  $\mathbf{r}_\perp$ . La seule transformation acceptable de ces coordonnées est  $\mathbf{r}'_\perp = K(v)\mathbf{r}_\perp$ , où  $K(v)$  est un facteur numérique qui dépend de  $v$ , tel que  $K(0) = 1$ . Par symétrie,  $K(v)$  ne doit pas dépendre de la direction de  $\mathbf{v}$ :  $K(-v) = K(v)$ . Puisque la transformation inverse est

$$\mathbf{r}_\perp = K(-v)\mathbf{r}'_\perp = K(-v)K(v)\mathbf{r}_\perp \quad (4.2)$$

On doit avoir  $K(v)^2 = 1$  ou  $K(v) = 1$ . Donc les coordonnées transverses à la vitesse relative ne sont pas affectées par la transformation :  $\mathbf{r}'_\perp = \mathbf{r}_\perp$ .

3. On cherche donc une transformation linéaire  $(x, t) \rightarrow (x', t')$  qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} x' &= ax + bt \\ t' &= ex + ft \end{aligned} \quad (4.3)$$

Les quatre constantes  $a, b, e, f$  ne dépendent que de  $v$ , la vitesse relative.

La vitesse  $u = dx/dt$  d'un objet dans  $S$  se transforme alors de la manière suivante :

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{adx + bdt}{edx + fdt} = \frac{au + b}{eu + f} \quad (4.4)$$

Puisque l'origine de  $S'$  se déplace à une vitesse  $v$  dans  $S$ , on écrit  $0 = (av + b)/(ev + f)$ . D'autre part, un objet au repos dans  $S$  ( $u = 0$ ) devrait avoir une vitesse  $u' = -v$  dans  $S'$ :  $-v = b/f$ . On trouve donc que  $b = -av$  et  $f = a$ . Jusqu'ici nous n'avons pas utilisé l'invariance de la vitesse de la lumière. En substituant les valeurs de  $b$  et  $f$  trouvées ci-haut cette condition s'exprime ainsi :

$$c = \frac{a(c - v)}{ec + a} \quad \Rightarrow \quad e = -av/c^2 \quad (4.5)$$

On peut donc écrire, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \equiv A(v) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

où  $a(v)$  est une fonction de  $v$  encore à déterminer et  $A(v)$  est la matrice de transformation. On sait que  $a(0) = 1$ . De plus,  $a(v)$  ne devrait pas dépendre du signe de  $v$ , mais seulement de son carré, en raison de l'invariance par rapport à l'inversion de l'espace : les changements simultanés

$$x \rightarrow -x \quad x' \rightarrow -x' \quad v \rightarrow -v \quad (4.7)$$

ne devraient pas affecter la transformation. Or il se trouve que cette inversion change  $a(v)$  en  $a(-v)$  et c'est tout. On en conclut que  $a(-v) = a(v)$ . Finalement, on sait que la transformation inverse (i.e. de  $S'$  à  $S$ ) s'obtient en renversant le signe de  $v$ :  $A(v)A(-v) = 1$  ou encore

$$a(v)a(-v) \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v/c^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

De cette contrainte on trouve que

$$a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \gamma \quad (4.9)$$

On peut donc écrire la transformation finale comme

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) & y' &= y \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) & z' &= z \end{aligned} \quad (4.10)$$

Elle porte le nom de *transformation de Lorentz*. Il est manifeste que deux référentiels inertiels ne peuvent se déplacer l'un par rapport à l'autre à une vitesse supérieure à  $c$ .

Mentionnons que la loi inverse de transformation des vitesses s'écrit

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} \quad \text{ou} \quad u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad (4.11)$$

Il est alors manifeste que même si  $u'$  et  $v$  sont arbitrairement proche de  $c$ , la vitesse  $u$  observée dans  $S$  ne peut pas dépasser  $c$ . La vitesse de la lumière est donc une *vitesse limite*.

### 4.1.3 Intervalle

On appelle *événement* un point  $(ct, \mathbf{r})$  de l'espace-temps. On introduit un facteur de  $c$  devant le temps  $t$  pour que tous les membres du multiplet aient les mêmes unités; en fait,  $ct$  peut servir de coordonnée temporelle aussi bien que  $t$ . Étant donné deux événements  $(ct_1, \mathbf{r}_1)$  et  $(ct_2, \mathbf{r}_2)$  on définit l'*intervalle* entre ces événements comme

$$s^2 \equiv c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 \quad (\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad t \equiv t_1 - t_2) \quad (4.12)$$

L'intervalle est un *invariant*, c'est-à-dire une quantité qui reste la même dans tous les référentiels inertiels. Pour s'en convaincre il suffit de choisir l'origine de deux référentiels  $S$  et  $S'$  au point  $\mathbf{r}_2$ , au temps  $t_2$  et de substituer les transformations de Lorentz dans la définition de  $s'^2$ :

$$\begin{aligned} s'^2 &= (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \\ &= \gamma^2(c^2 t^2 + (v/c)^2 x^2 - 2xtv) - \gamma^2(x^2 + v^2 t^2 - 2xtv) - y^2 - z^2 \\ &= (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

L'intervalle est l'analogie dans l'espace-temps de la distance (au carré) en l'espace de dimension 3: l'intervalle est invariant par rapport aux changements de référentiel inertiel tout comme la distance est invariante par rapport aux rotations des axes  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}$ . La différence importante est que l'intervalle peut être positif ou négatif alors que la distance carrée est toujours positive ou nulle. Deux événements séparés par un intervalle nul sont dits sur le même *cône de lumière*, car un signal lumineux émis à  $\mathbf{r}_1$  au temps  $t_1$  atteindra  $\mathbf{r}_2$  exactement à  $t_2$  (on suppose que  $t_1 < t_2$ ). Deux événements séparés par un intervalle négatif ne peuvent pas être reliés de manière causale, i.e. par un signal se propageant à une vitesse égale ou inférieure à  $c$ . Par contre, deux événements séparés par un intervalle positif peuvent être reliés par des signaux se propageant plus lentement que  $c$ .

### 4.1.4 Contraction des Longueurs et Dilatation du Temps

Les conséquences les plus immédiates des transformations de Lorentz sont que les objets en mouvement sont contractés dans la direction du mouvement et que le temps pour eux s'écoule plus lentement en comparaison du temps tel que mesuré par l'observateur au repos.

Considérons un objet de longueur  $L$  dans son référentiel propre  $S$  et soit  $S'$  le référentiel de l'observateur, se déplaçant à une vitesse  $v$  par rapport à l'objet. Si  $x$  et  $x'$  sont les coordonnées correspondantes dans la direction du mouvement, on a bien sûr  $x = \gamma(x' + vt')$ . Affublons des indices 1 et 2 les coordonnées des deux extrémités de l'objet. Au temps  $t' = 0$ , c'est-à-dire à un instant donné dans  $S'$ , on a  $x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1)$ , ou encore  $L = \gamma L'$ , où  $L' = x'_2 - x'_1$  est par définition la longueur de l'objet telle que mesurée par l'observateur dans  $S'$ . Il y a donc contraction des longueurs :

$$L' = L\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (4.14)$$

D'autre part, imaginons une horloge qui produit un tic avec une période  $T$  dans son référentiel propre, toujours à la même position  $x$ . Désignons par  $t_1$  et  $t_2$  les deux instants auxquels se produisent deux tics consécutifs. Comme  $ct' = \gamma(ct - \beta x)$ , on a, pour une même position  $x$ , la relation  $t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1)$ , ou encore  $T' = \gamma T$ :

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.15)$$

Ceci signifie que la période de l'horloge en mouvement telle que mesurée par l'observateur est plus grande que sa période au repos.

L'élément de volume  $d^3r$  dans un référentiel en mouvement est contracté comme les longueurs le sont, car une seule des trois différentielles perpendiculaires qui le forment est contractée, dans la direction du mouvement. On écrit donc  $d^3r' = d^3r/\gamma$ . L'élément de temps  $dt$ , lui, est dilaté :  $dt' = \gamma dt$ . Cependant, l'élément d'espace-temps est invariant :  $d^3r dt = d^3r' dt'$ , puisque les deux effets se compensent.

## 4.2 Formalisme covariant

### 4.2.1 Quadri-vecteurs et quadri-tenseurs

Le temps et l'espace jouent dans la transformation de Lorentz des rôles presque identiques. Dans le but de profiter de cette similitude entre temps et espace, on ajoute aux trois coordonnées  $x^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) de l'espace une quatrième coordonnée  $x^0 = ct$ , représentant le temps. Le facteur de  $c$  lui donne la dimension (i.e. les unités) d'une longueur. On note collectivement ces quatre coordonnées par la notation indiciaire  $x^\mu$ , où l'indice grec  $\mu$  prend les valeurs de 0 à 3, comme tous les indices grecs que nous utiliserons dorénavant.

Lors d'une transformation de Lorentz, la coordonnée spatio-temporelle  $x^\mu$  se transforme comme suit :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (4.16)$$

où  $\Lambda^\mu{}_\nu$  est une matrice de transformation. L'indice de gauche numérote les rangées, l'indice de droite les colonnes et les indices répétés sont sommés. Pour la transformation (4.10) cette matrice est

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

En notation matricielle, la transformation de la coordonnée s'écrit simplement  $x' = \Lambda x$ , où  $x$  est le vecteur-colonne abritant les composantes  $x^\mu$ .

Examinons maintenant comment se transforme l'opérateur gradient augmenté de la dérivée par rapport au temps, noté

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (4.18)$$

Exprimé en fonction des nouvelles coordonnées obtenues par transformation de Lorentz, ceci devient

$$\partial_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu \quad (4.19)$$

En fonction de  $\Lambda^{-1}$ , la matrice inverse de  $\Lambda$ , on écrit

$$\partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \quad \text{ou} \quad d' = (\Lambda^{-1})^t d \quad (4.20)$$

où  $d$  est le vecteur-colonne abritant les composantes  $\partial_\mu$ . Bien entendu,  $\Lambda^{-1}$  est la matrice de la transformation inverse obtenue simplement en changeant le signe de la vitesse :

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

### Définition d'un quadri-vecteur

Généralement, tout quadruplet de quantités, noté  $A_\mu$ , se transformant comme les dérivées  $\partial_\mu$  est qualifié de *quadri-vecteur covariant*.<sup>1</sup> Les indices d'un quadri-vecteur covariant sont placés en bas. Au contraire, tout quadruplet de quantités, noté  $B^\mu$ , se transformant comme les coordonnées  $x^\mu$  est qualifié de *quadri-vecteur contravariant*. Les indices d'un quadri-vecteur contravariant sont placés en haut. On appelle  $x^\mu$  le quadri-vecteur position, ou la quadri-position, alors que  $\partial_\mu$  est le quadri-gradient. Les quadri-vecteurs contravariants se transforment à l'aide de la matrice  $\Lambda$ , alors que les quadri-vecteurs covariants se transforment à l'aide de la matrice inverse :

$$B'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu B^\nu \quad A'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu A_\nu \quad (4.22)$$

Grâce à notre convention sur la position des indices de  $\Lambda^\mu{}_\nu$ , la convention de sommation est maintenant la suivante : on doit sommer sur toute paire d'indices répétés dont un se trouve en haut et l'autre en bas. En notation matricielle, un quadri-vecteur contravariant  $\mathbf{B}$  et un quadri-vecteur covariant  $\underline{\mathbf{A}}$  se transforment ainsi :

$$\mathbf{B}' = \Lambda \mathbf{B} \quad \underline{\mathbf{A}}' = (\Lambda^{-1})^t \underline{\mathbf{A}} \quad (4.23)$$

Pour insister sur la nature covariante de  $A_\mu$ , nous soulignons le vecteur-colonne correspondant ( $\underline{\mathbf{A}}$ ).

<sup>1</sup> On écrit parfois *4-vecteur* pour abrégier *quadri-vecteur*.

### Contraction

La *contraction* d'un indice covariant avec un indice contravariant se définit comme une opération par laquelle les deux indices sont identifiés et sommés. Spécifiquement, la contraction d'un vecteur covariant  $A_\mu$  avec un vecteur contravariant  $B^\mu$  est le produit  $A_\mu B^\mu$ , dans lequel  $\mu$  est sommé de 0 à 4. La quantité résultante est un invariant, comme on peut le constater d'après les lois de transformation ci-haut :

$$\begin{aligned} A'_\mu B'^\mu &= (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \Lambda^\mu{}_\beta A_\alpha B^\beta \\ &= \delta^\alpha{}_\beta A_\alpha B^\beta \\ &= A_\alpha B^\alpha \end{aligned} \quad (4.24)$$

Par exemple, l'opérateur différentiel  $x^\mu \partial_\mu$  est un invariant, c'est-à-dire que sa forme est la même dans tous les référentiels inertiels.

En notation matricielle, l'opération de contraction ci-haut s'écrit

$$\underline{\mathbf{A}}^t \mathbf{B}' = (\underline{\mathbf{A}}^t \Lambda^{-1})(\Lambda \mathbf{B}) = \underline{\mathbf{A}}^t \mathbf{B} \quad (4.25)$$

Au contraire, la contraction de deux indices covariants (ou deux indices contravariants) n'est pas invariante. Autrement dit, l'expression  $A_\mu A_\mu$  (on somme sur  $\mu$ ) n'est pas numériquement la même dans tous les référentiels. L'apparition d'une telle expression dans un calcul signifie qu'on y effectue des opérations qui ne sont pas valables dans tous les référentiels et est probablement l'effet d'une erreur!

### Tenseurs

Ce sont les propriétés de transformation qui définissent la notion de vecteur. On généralise cette notion à des quantité comportant plus d'un indice, qu'on appelle généralement *tenseurs*. Un quadri-tenseur de *rang*  $n$  est une quantité comportant  $4^n$  composantes spécifiées par  $n$  indices grecs allant de 0 à 3. Spécifiquement, un tenseur contravariant de rang 2 est un ensemble de quantités  $B^{\mu\nu}$  se transformant comme suit lors d'un changement de référentiel :

$$B'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta B^{\alpha\beta} \quad (4.26)$$

En notation matricielle, ceci devient

$$\mathbf{B}' = \Lambda \mathbf{B} \Lambda^t \quad (4.27)$$

Un tenseur deux fois covariant se noterait plutôt  $A_{\mu\nu}$  et se transformerait comme suit :

$$A'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu A_{\alpha\beta} \quad (4.28)$$

ou, en notation matricielle,

$$\underline{\mathbf{A}}' = (\Lambda^{-1})^t \underline{\mathbf{A}} (\Lambda^{-1})$$

Encore une fois, on souligne le symbole matriciel du tenseur doublement covariant pour le distinguer d'un tenseur contravariant.

On peut aussi concevoir des tenseurs mixtes, affublés d'un indice covariant et d'un indice contravariant et notés par exemple  $C^\mu{}_\nu$ . Il faut alors faire bien attention à la position des indices. Un tel tenseur se transformerait comme suit :

$$C'^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu C^\alpha{}_\beta \quad (4.29)$$

La contraction  $C^\alpha{}_\alpha$  est alors un invariant.



### 4.2.2 Tenseur métrique

En fonction des composantes  $x^\mu$  du quadri-vecteur position, l'intervalle invariant  $s^2$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (4.30)$$

où le symbole  $g_{\mu\nu}$  est défini comme composante de la matrice suivante :

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Par définition, une transformation de Lorentz est une transformation linéaire spécifiée par une matrice  $\Lambda$  telle que l'intervalle  $s^2$  est invariant. Autrement dit,

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \quad (4.32)$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire

$$\mathbf{x}^t \mathbf{g} \mathbf{x} = \mathbf{x}'^t \mathbf{g} \mathbf{x}' \quad (4.33)$$

Puisque  $\mathbf{x}' = \Lambda \mathbf{x}$ , on trouve

$$(\Lambda \mathbf{x})^t \mathbf{g} \Lambda \mathbf{x} = \mathbf{x}'^t \mathbf{g} \mathbf{x}' \implies \Lambda^t \mathbf{g} \Lambda = \mathbf{g} \quad (4.34)$$

Cette dernière condition doit être satisfaite par toute transformation de Lorentz. En fait, cette condition, sous forme matricielle, représente un ensemble de 10 conditions indépendantes sur les 16 composantes de la matrice  $\Lambda$ , ce qui laisse 6 paramètres indépendants pour caractériser  $\Lambda$ . Ces six paramètres sont les trois composantes de la vitesse relative des deux référentiels, ainsi que trois angles nécessaires pour orienter le trièdre  $x'y'z'$  par rapport au trièdre  $xyz$ .

La matrice  $\mathbf{g}$  est définie de la même manière dans tous les référentiels inertiels. D'autre part, la condition  $\Lambda^t \mathbf{g} \Lambda = \mathbf{g}$  peut s'inverser comme suit :

$$\mathbf{g} = (\Lambda^{-1})^t \mathbf{g} \Lambda^{-1} \quad (4.35)$$

ce qui signifie, en comparant avec (4.28), que  $g_{\mu\nu}$  se comporte comme un tenseur covariant de rang deux. On l'appelle le *tenseur métrique* car il définit l'intervalle en fonction de  $x^\mu$  et l'intervalle est la mesure naturelle des 'distances' dans l'espace-temps. Le tenseur métrique a ceci de particulier qu'il a exactement la même forme (les mêmes composantes) dans tous les référentiels, même s'il se transforme comme un tenseur.

En prenant l'inverse de la relation matricielle ci-haut, on trouve

$$\Lambda \mathbf{g}^{-1} \Lambda^t = \mathbf{g}^{-1} \quad (4.36)$$

Ce qui signifie, en comparant avec (4.27), que la matrice  $\mathbf{g}^{-1}$  définit un tenseur *contravariant* de rang deux. On note ses composantes  $g^{\mu\nu}$ . D'après la forme explicite de  $\mathbf{g}$ , on voit que  $\mathbf{g}^{-1} = \mathbf{g}$ , ou  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ .

Le tenseur métrique permet de transformer un quadri-vecteur contravariant en quadri-vecteur covariant, par contraction des indices. Ainsi, la quantité  $g_{\mu\alpha} B^\alpha$  est un quadri-vecteur covariant,

noté  $B_\mu$ . En notation matricielle on écrit  $B_\mu$  comme  $\mathbf{gB}$  et on constate la loi de transformation suivante :

$$\begin{aligned} (\mathbf{gB})' &= \mathbf{g}\Lambda\mathbf{B} \\ &= (\Lambda^{-1})^t \Lambda^t \mathbf{g}\Lambda\mathbf{B} \\ &= (\Lambda^{-1})^t \mathbf{gB} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Or, un vecteur covariant se transforme précisément de cette manière, d'après les Eqs (4.23). Ainsi, on peut définir une position covariante  $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$  et l'intervalle peut s'exprimer simplement comme la contraction  $x^\mu x_\mu$ .

Le tenseur métrique inverse  $g^{\mu\nu}$  permet de transformer un indice covariant en indice contravariant. Ainsi, à partir d'un quadri-vecteur covariant  $A_\mu$  (ou  $\underline{\mathbf{A}}$ ), on construit un quadri-vecteur contravariant  $A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu$  ou  $g\underline{\mathbf{A}}$ . On montre facilement que cette quantité se transforme comme un quadri-vecteur contravariant :

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}\underline{\mathbf{A}})' &= \mathbf{g}\underline{\mathbf{A}}' \\ &= \mathbf{g}(\Lambda^{-1})^t \underline{\mathbf{A}} \\ &= \Lambda(\Lambda^{-1})\mathbf{g}(\Lambda^{-1})^t \underline{\mathbf{A}} \\ &= \Lambda\mathbf{g}\underline{\mathbf{A}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

où nous avons utilisé l'inverse de la relation  $\Lambda^t \mathbf{g}\Lambda = \mathbf{g}$ :

$$(\Lambda^{-1})\mathbf{g}(\Lambda^{-1})^t = \mathbf{g} \quad (4.39)$$

Notons que la contraction  $g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}$  est précisément le delta de Kronecker  $\delta_\mu^\nu$ . En notation matricielle, ceci signifie simplement que  $\mathbf{g}^2 = \mathbf{1}$ . Dans cette notation matricielle, le tenseur covariant  $B_{\mu\nu}$  obtenu de  $B^{\mu\nu}$  par abaissement des indices est  $\mathbf{gBg}$ , alors que le tenseur mixte  $B^\mu{}_\nu$  est  $\mathbf{Bg}$  et que l'autre tenseur mixte  $B_\mu{}^\nu$  est  $\mathbf{gB}$ .

### 4.2.3 Exemples

#### Temps propre

Le *temps propre*  $\tau$  d'un objet en mouvement est simplement le temps tel qu'il s'écoule dans le référentiel de l'objet. Dans le référentiel inertiel  $S'$  qui se déplace avec l'objet à un instant donné, la différentielle de temps propre coïncide avec  $dt'$ . Cependant, l'objet peut en général être accéléré de sorte que le référentiel  $S'$  n'est pas le même à tous les instants. Quel que soit le référentiel dans lequel on observe l'objet, la différentielle de temps propre peut toujours être exprimée comme suit :

$$d\tau \equiv \frac{1}{c} \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = dt \sqrt{1 - u^2/c^2} = \frac{dt}{\gamma} \quad (4.40)$$

où  $u$  est la vitesse de l'objet, qui peut dépendre du temps. En effet, dans le référentiel  $S'$ ,  $dx^\mu dx_\mu = c^2 d\tau^2$  et de plus l'expression ci-haut est invariante, puisque  $dx^\mu dx_\mu$  est un invariant. Pour l'obtenir le temps propre total écoulé sur la trajectoire de l'objet, on intègre  $d\tau$ :

$$\tau = \int d\tau = \int \frac{dt}{\gamma} = \int dt \sqrt{1 - u^2/c^2} \quad (4.41)$$

**quadri-vitesse**

Considérons un objet se déplaçant à une vitesse instantanée  $u$ . On définit sa *quadri-vitesse*  $u^\mu$  comme

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (4.42)$$

La différentielle  $d\tau$  est invariante, alors que  $dx^\mu$  se transforme comme les coordonnées; donc  $u^\mu$  est une quadri-vecteur. En fonction de la vitesse  $\mathbf{u}$ , les composantes explicites sont

$$u^\mu : (c\gamma, \gamma\mathbf{u})$$

Par contraction on obtient l'invariant  $u^\mu u_\mu = c^2$ . Le temps propre écoulé le long d'une trajectoire peut alors s'écrire comme

$$\tau = \int d\tau = \frac{1}{c^2} \int u_\mu dx^\mu \quad (4.43)$$

**Quadri-accélération**

On définit aussi la quadri-accélération

$$a^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{du^\mu}{dt} \quad (4.44)$$

L'expression explicite (4.42) de la quadri-vitesse donne

$$a^\mu = \left( \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{c(1 - u^2/c^2)^2}, \frac{\mathbf{a}}{1 - u^2/c^2} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})\mathbf{u}}{c^2(1 - u^2/c^2)^2} \right) \quad (4.45)$$

À partir de ce quadri-vecteur on peut construire certains invariants. Par exemple,

$$\begin{aligned} u_\mu a^\mu &= u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (u_\mu u^\mu) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

En utilisant les expressions explicites pour  $u^\mu$  et  $a^\mu$  en fonction des composantes temporelles et spatiales, la condition  $u_\mu a^\mu = 0$  ressort de manière triviale. Un autre invariant à considérer est  $a^\mu a_\mu$ . On calcule que

$$a^\mu a_\mu = -\gamma^4 (\mathbf{a}^2 + (\gamma/c)^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})^2) \quad (4.47)$$

Cette quantité est la même dans tous les référentiels, même si les valeurs de  $\mathbf{u}$  et de  $\mathbf{a}$  changent.

**quadri-courant**

Un autre quadri-vecteur est formé par la densité de courant et la densité de charge :

$$J^\mu : (c\rho, \mathbf{J}) \quad (4.48)$$

Pour s'en convaincre, il suffit d'écrire l'équation de continuité comme

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (4.49)$$

Comme la conservation de la charge doit être valide dans tous les référentiels et que  $\partial_\mu$  est un quadri-vecteur, le quadri-courant  $J^\mu$  en est forcément un lui aussi. Une autre façon de se convaincre que  $J^\mu$  est un quadri-vecteur est de considérer l'expression de la densité de courant associée à un ensemble de charges ponctuelles en mouvement :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_i q^{(i)} \mathbf{v}^{(i)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(i)}) \quad (4.50)$$

Ici  $q^{(i)}$ ,  $\mathbf{r}^{(i)}$  et  $\mathbf{v}^{(i)}$  sont respectivement la charge, la position et la vitesse de la  $i^e$  particule. La fonction delta dans la formule ci-haut n'est pas un invariant de Lorentz, puisqu'elle est définie par la relation

$$\int d^3r^{(i)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(i)}) = 1 \quad (4.51)$$

valide dans tous les référentiels et que  $d^3r$  n'est pas invariant. Cependant,  $\gamma^{(i)} d^3r^{(i)}$ , où  $\gamma^{(i)} = 1/\sqrt{1 - (v^{(i)}/c)^2}$ , est un invariant. La fonction  $(1/\gamma^{(i)})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(i)})$  est donc aussi un invariant. Écrivons donc la densité de courant et la densité de charge comme

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}) &= \sum_i q^{(i)} \gamma^{(i)} \mathbf{v}^{(i)} [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(i)})/\gamma^{(i)}] \\ \rho(\mathbf{r}) &= \sum_i q^{(i)} \gamma^{(i)} [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(i)})/\gamma^{(i)}] \end{aligned} \quad (4.52)$$

En fonction de la quadri-vitesse de chaque particule, on a

$$J^\mu = \sum_i q_i u^{\mu(i)} [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(i)})/\gamma^{(i)}] \quad (4.53)$$

Comme  $q^{(i)}$  et la fonction delta modifiée sont des invariants, on conclut que  $J^\mu$  est bel et bien un quadri-vecteur.

## 4.3 Formulation relativiste de l'électrodynamique

### 4.3.1 quadri-vecteur du potentiel électromagnétique

Revenons aux lois de l'électrodynamique et exprimons-les dans le langage des quadri-vecteurs. Il ne s'agit pas de découvrir ici des résultats nouveaux, mais d'exprimer des relations déjà connues dans une notation nouvelle.

À l'aide du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  et du potentiel électrique  $\Phi$ , définissons une quantité à quatre composantes comme suit :

$$A^\mu : (\Phi, \mathbf{A}) \quad (4.54)$$

Démontrons que cette quantité est un quadri-vecteur. Pour ce faire, rappelons-nous que, dans la jauge de Lorentz, les lois de l'électrodynamique peuvent s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -4\pi \rho \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{aligned} \quad \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \right) \quad (4.55)$$

Dans la notation indicielle, ces équations prennent la forme suivante :

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (\partial_\mu A^\mu = 0) \quad (4.56)$$

Pour que la première équation soit *covariante*, c'est-à-dire pour qu'elle s'exprime de la même façon dans un autre référentiel inertiel, il faut absolument que  $A^\mu$  soit un quadri-vecteur. La deuxième équation (la condition de Lorentz) est alors covariante elle-même. En résumé, la covariance de la conservation de la charge et des équations de l'électrodynamique ne peut se faire sans que les quantités  $J^\mu$  et  $A^\mu$  soient des quadri-vecteurs. Notons que le fait que  $A^\mu$  soit un quadri-vecteur est invariant de jauge; une transformation de jauge s'écrit en effet comme suit :

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \xi \quad (4.57)$$

où  $\xi$  est une fonction scalaire (i.e. invariante). Évidemment, le passage de  $A^\mu$  vers  $A_\mu$  se fait à l'aide du tenseur métrique et nous utiliserons à la fois les versions covariante et contravariante des quadri-vecteurs ou quadri-tenseurs dans ce qui suit.

Lors d'un changement de référentiel, les composantes temporelle et spatiales de  $J^\mu$  (ou de  $A^\mu$ ) se combinent. Par exemple, considérons un fil rectiligne selon l'axe des  $x$  dans lequel circule un courant  $I$  et qui ne porte pas de charge nette. On sait qu'une telle configuration de charge donne lieu à un champ magnétique qui circule autour du fil. Si on procède à un changement de référentiel  $S \rightarrow S'$  le long de cet axe, la densité de courant dans  $S'$  est différente de  $J$  et une densité de charge  $\rho' = -v\gamma J/c^2$  apparaît. Cette densité de charge fait apparaître un champ électrique radial dans  $S'$ . Il s'agit d'un fait capital : non seulement les phénomènes magnétiques et électriques sont-ils unifiés par les équations de Maxwell, mais la distinction entre les deux n'est pas invariante : elle est fonction du référentiel.

### 4.3.2 Tenseur électromagnétique

Dans le but de préciser les lois de transformation des champs électrique et magnétique, il faut définir le *tenseur électromagnétique*:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.58)$$

Cette quantité est le produit, composante par composante, de deux quadri-vecteurs. Lors d'un changement de référentiel, elle se transforme donc ainsi :

$$F'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu F_{\alpha\beta} \quad \text{ou} \quad \underline{F} = \Lambda^t \underline{F}' \Lambda \quad (4.59)$$

Pour éviter la confusion entre les représentations matricielles des tenseurs covariants et contravariants, nous plaçons un trait au-dessous ou au-dessus du symbole matriciel, selon que les indices sont placés en bas ou en haut. La version contravariante se transforme plutôt comme suit :

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta} \quad \text{ou} \quad \bar{F}' = \Lambda \bar{F} \Lambda^t \quad (4.60)$$

On a la relation  $\underline{F} = \mathbf{g} \bar{F} \mathbf{g}$ . Le tenseur électromagnétique est antisymétrique dans ses indices :  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ .

Si on exprime  $F_{\mu\nu}$  en composantes, on trouve

$$F_{\mu\nu} : \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

La version contravariante s'obtient en changeant le signe du champ électrique :

$$F^{\mu\nu} : \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

Ce tenseur renferme donc toutes les composantes des champs magnétique et électrique. Les équations de Maxwell s'expriment de façon particulièrement concise en fonction de  $F_{\mu\nu}$ . Pour le démontrer il suffit de constater que

$$\begin{aligned} \partial^\nu F_{\mu\nu} &= \partial^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= -\partial^\nu \partial_\nu A_\mu = -\frac{4\pi}{c} J_\mu \end{aligned} \quad (4.63)$$

où nous avons utilisé l'Éq. (4.56). Si on développe cette équation composante par composante on retrouve les lois de Gauss et d'Ampère-Maxwell.

Quant aux deux autres équations de Maxwell, on les retrouve de la façon suivante : définissons le tenseur de Levi-Civita en 4 dimensions  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$  et considérons l'expression

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \partial_\nu F_{\rho\lambda} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} (\partial_\nu \partial_\rho A_\lambda - \partial_\nu \partial_\lambda A_\rho) \quad (4.64)$$

Comme  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$  est antisymétrique dans tous ses indices et que  $\partial_\nu \partial_\rho$  et  $\partial_\nu \partial_\lambda$  sont symétriques, cette expression s'annule. En développant cette expression composante par composante, on constate qu'il s'agit de la loi de Faraday et de l'équation  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Notons en passant qu'on définit le *tenseur électromagnétique dual*

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda} \quad (4.65)$$

L'expression explicite de ce tenseur dual est la même que pour  $F_{\mu\nu}$  sauf pour le fait que les rôles de  $\mathbf{E}$  et de  $\mathbf{B}$  sont échangés. Plus précisément,  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  s'obtient à partir de  $F^{\mu\nu}$  par les substitutions  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$  et  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ :

$$\tilde{F}^{\mu\nu} : \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

On peut donc écrire les équations de Maxwell comme

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu \quad \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (4.67)$$

Il est bon de détailler la transformation des composantes de  $F^{\mu\nu}$  lors d'un changement de référentiel. Supposons que les deux référentiels  $S$  et  $S'$  se déplacent l'un par rapport à l'autre le long de l'axe des  $x$ . La matrice de transformation est donnée par l'expression (4.17). Le nouveau tenseur électromagnétique est alors obtenu par multiplication des matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & -E'_x & -E'_y & -E'_z \\ E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \Lambda^t \quad (4.68)$$

On obtient explicitement

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z) & B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y) & B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Exprimons ces transformations différemment en appelant respectivement  $\mathbf{E}_\perp$  et  $\mathbf{E}_\parallel$  les composantes de  $\mathbf{E}$  perpendiculaire et parallèle à la direction de  $\mathbf{v}$ , la vitesse relative des référentiels. On écrit alors

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}'_\perp &= \gamma \left( \mathbf{E}_\perp + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B}_\perp \right) & \mathbf{E}'_\parallel &= \mathbf{E}_\parallel \\ \mathbf{B}'_\perp &= \gamma \left( \mathbf{B}_\perp - \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{E}_\perp \right) & \mathbf{B}'_\parallel &= \mathbf{B}_\parallel \end{aligned}} \quad (4.70)$$

### Remarques

1. Supposons que  $\mathbf{E} = 0$  et  $\mathbf{B} \neq 0$  dans  $S$ . Par un changement de référentiel, on peut augmenter la composante de  $\mathbf{B}$  perpendiculaire à  $\mathbf{v}$  et faire apparaître un champ électrique perpendiculaire à  $\mathbf{v}$ .
2. De même, si  $\mathbf{E} \neq 0$  et  $\mathbf{B} = 0$  dans  $S$ , un changement de référentiel augmente la composante perpendiculaire de  $\mathbf{E}$  et fait apparaître un champ magnétique.
3. Si  $\mathbf{B} \neq 0$  et  $\mathbf{E} = 0$  dans un référentiel, alors il n'existe aucun référentiel dans lequel  $\mathbf{B} = 0$ . De même, si  $\mathbf{B} = 0$  et  $\mathbf{E} \neq 0$  dans un référentiel, alors  $\mathbf{E} \neq 0$  dans tous les référentiels.

### 4.3.3 Invariants du champ

Un invariant du champ est une quantité formée à l'aide des champs électrique et magnétique qui ne change pas d'un référentiel à l'autre. Comme exemple, considérons la trace  $\text{Tr}(\overline{\mathbf{F}}\underline{\mathbf{E}})$ . En utilisant les transformations  $\overline{\mathbf{F}}' = \Lambda \overline{\mathbf{F}} \Lambda^t$  et  $\underline{\mathbf{E}}' = (\Lambda^{-1})^t \underline{\mathbf{E}} \Lambda^{-1}$ , on calcule que

$$\text{Tr}(\overline{\mathbf{F}}' \underline{\mathbf{E}}') = \text{Tr}(\Lambda \overline{\mathbf{F}} \Lambda^t (\Lambda^{-1})^t \underline{\mathbf{E}} \Lambda^{-1}) = \text{Tr}(\Lambda^{-1} \Lambda \overline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{E}}) = \text{Tr}(\overline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{E}}) \quad (4.71)$$

Nous avons utilisé la propriété cyclique de la trace ( $\text{Tr} ABC = \text{Tr} CAB$ ). On voit donc que la trace de  $\overline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{E}}$  est invariante. Un calcul explicite donne

$$\boxed{\frac{1}{2} \text{Tr}(\overline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{E}}) = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2} \quad (4.72)$$

Cette quantité est donc indépendante du référentiel. Ceci était a priori évident puisque  $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  est une contraction complète des indices.<sup>2</sup>

Un autre invariant s'obtient en considérant plutôt la contraction  $\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ . On calcule que

$$\boxed{\frac{1}{4} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}} \quad (4.73)$$

Donc le produit scalaire  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  est invariant. Cependant, il faut remarquer que cette quantité change de signe lors d'une transformation de parité, car  $\mathbf{E}$  est un vecteur polaire et  $\mathbf{B}$  un vecteur axial. Une autre façon d'obtenir cet invariant est de considérer l'expression  $\det \overline{\mathbf{F}}$ , en notant que  $\det \Lambda = \det \Lambda^t = 1$ .

<sup>2</sup> Le même calcul exercé sur  $\text{Tr} \mathbf{F}$  donne des résultats triviaux puisque  $\text{Tr} \mathbf{F} = 0$  dans tous les référentiels.

**Remarques**

1. Si  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont de même grandeur dans un référentiel, ils le sont dans tous les référentiels ( $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = 0$ ).
2. Si  $\mathbf{B} = 0$  et  $\mathbf{E} \neq 0$  dans un référentiel, alors  $\mathbf{E}$  ne pourra être plus petit dans un autre référentiel.
3. Si  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont perpendiculaires dans un référentiel, ils le seront dans tous les référentiels ( $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ ).

**4.4 Applications****4.4.1 Champ d'une charge ponctuelle en mouvement uniforme**

Nous nous intéressons ici au champ électrique produit par une charge ponctuelle  $q$  se déplaçant à une vitesse constante. Nous allons calculer ce champ au moyen d'une transformation de Lorentz effectuée à partir du référentiel  $S$  dans lequel la charge est au repos. Dans ce référentiel, le champ électrique qu'elle produit est

$$\mathbf{E} = q \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{ou} \quad E_i = \frac{q}{r^3} x_i \quad (4.74)$$

Appliquons les transformations (4.70) pour calculer les champs produits par une charge ponctuelle  $q$ , cette fois se déplaçant avec une vitesse  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$ . Nous nous plaçons donc dans un référentiel  $S'$  se déplaçant à une vitesse  $-\mathbf{v}$  par rapport à  $S$ . On trouve

$$E'_x = \gamma E_x \quad E'_y = \gamma E_y \quad E'_z = E_z \quad (4.75)$$

Nous nous intéressons au champ lorsque la charge est à l'origine dans  $S'$ , c'est-à-dire au temps  $t' = 0$ . La relation entre les coordonnées est alors

$$x = x' \quad y = y' \quad z = \gamma z' \quad (4.76)$$

Donc la distance à l'origine dans  $S$  est

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + \gamma^2 z'^2} \quad (4.77)$$

On peut alors écrire

$$E'_i = q\gamma \frac{x'_i}{(x'^2 + y'^2 + \gamma^2 z'^2)^{3/2}} \quad (4.78)$$

Soit  $\theta$  l'angle que fait le rayon vecteur avec  $\mathbf{v}$ . Alors  $z' = r' \cos \theta$  et  $x'^2 + y'^2 = r'^2 \sin^2 \theta$  et

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + \gamma^2 z'^2 &= r'^2 (\sin^2 \theta + \gamma^2 (1 - \sin^2 \theta)) \\ &= \gamma^2 r'^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (4.79)$$

On peut donc écrire

$$\mathbf{E}' = q \frac{(1 - \beta^2) \mathbf{r}'}{r'^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (4.80)$$

**Remarques**

1. On retrouve le résultat statique dans la limite non relativiste ( $\beta \rightarrow 0$ ).
2. Le champ est renforcé dans la direction perpendiculaire à la vitesse, et diminué dans la direction parallèle. Dans la limite ultra-relativiste, la distribution angulaire du champ affecte la forme d'une crêpe.



### 4.4.2 Rayonnement d'une charge accélérée

Nous avons déjà rencontré la formule de Larmor (3.97) pour une charge accélérée se déplaçant à faible vitesse; la puissance rayonnée par une telle charge est

$$P = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \quad (4.81)$$

Cette formule est exacte si la vitesse de la particule est nulle à un instant donné. Pour obtenir la formule correspondante à vitesse arbitraire, nous pouvons effectuer une transformation de Lorentz.

Soit  $S$  le référentiel de l'observateur, dans lequel la particule en question à une vitesse  $\mathbf{u}$  à un instant donné. Soit  $S'$  le référentiel inertiel qui coïncide avec le référentiel propre de la particule à cet instant précis. Notons que le référentiel propre de la particule n'est pas inertiel si cette particule est accélérée; on peut cependant trouver un référentiel inertiel qui coïncide avec le référentiel propre à un instant donné, en l'occurrence  $S'$ . Dans  $S'$  la vitesse  $\mathbf{u}'$  de la particule est nulle et la formule de Larmor non relativiste est applicable.

Notons que la puissance rayonnée  $P$  est un invariant. En effet, il s'agit d'une énergie émise par unité de temps. Étant donné que la particule est au repos dans  $S'$ , la différentielle d'énergie  $dW$  et la différentielle de temps  $dt$  sont données dans  $S$  par le facteur de dilatation du temps :

$$dW = \gamma dW' \quad dt = \gamma dt' \quad (4.82)$$

Donc, la puissance dissipée en rayonnement est

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dW'}{dt'} = P' \quad (4.83)$$

Donc le membre de droite de la formule de Larmor doit être remplacé par un invariant qui se trouve à coïncider avec  $2e^2 a'^2/3c^3$  dans le référentiel  $S'$ .

Pour trouver cet invariant, utilisons la quadri-accélération  $a^\mu = du^\mu/d\tau$ . D'après la formule (4.47), l'invariant  $a^\mu a_\mu$  est égal à  $-a^2$  dans le référentiel où  $\mathbf{u} = 0$ . La modification à apporter à la formule de Larmor est donc

$$P = -\frac{2e^2}{3c^3} a^\mu a_\mu = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^4 (\mathbf{a}^2 + (\gamma/c)^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})^2) \quad (4.84)$$

#### Remarques

1. Si la vitesse et l'accélération sont colinéaires, alors  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = ua$  et on calcule que

$$P = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \gamma^6 \quad (\mathbf{u} \parallel \mathbf{a}) \quad (4.85)$$

2. Si la vitesse est perpendiculaire à l'accélération, on a

$$P = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \gamma^4 \quad (\mathbf{u} \perp \mathbf{a}) \quad (4.86)$$

Le rayonnement est donc beaucoup plus intense si  $\mathbf{u} \parallel \mathbf{a}$  à hautes vitesses ( $\gamma \gg 1$ ).

## 4.5 Formulation Lagrangienne

### 4.5.1 Principe de la moindre action

En mécanique, les équations du mouvement peuvent en général être obtenues à partir du principe de moindre action. Ce principe stipule que la trajectoire  $\mathbf{r}(t)$  d'une particule (ou d'un système mécanique plus général) s'obtient en demandant qu'une certaine fonctionnelle  $S[\mathbf{r}(t)]$  appelée *action* soit stationnaire par rapport à une variation de la trajectoire. En d'autres termes, si on effectue une variation  $\delta\mathbf{r}(t)$  de la trajectoire, la variation correspondante de l'action doit être nulle au premier ordre en  $\delta\mathbf{r}$ . Pour un système mécanique simple, l'action est égale à l'intégrale sur la trajectoire de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$S[\mathbf{r}] = \int dt L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \quad \text{où} \quad L = T(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}) \quad (4.87)$$

On appelle  $L$  la *fonction de Lagrange* ou *lagrangien*.

En relativité on veut que les équations du mouvement aient la même forme dans tous les référentiels inertiels. Pour cela il faut que l'action soit invariante par rapport aux transformations de Lorentz. Guidés par ce principe, essayons d'obtenir l'action d'une particule libre. Soit  $x_\mu(\tau)$  la trajectoire de la particule dans l'espace-temps, en fonction du temps propre  $\tau$ . La quantité invariante la plus simple qu'on peut construire avec une telle trajectoire est sa longueur propre, c'est-à-dire le temps écoulé dans le référentiel (non-inertiel, en général) de la particule. On suppose donc que l'action est

$$S_0 = -mc^2 \int d\tau = m \int u_\mu dx^\mu \quad (4.88)$$

où  $u_\mu$  est la quadri-vitesse de la particule. La constante de proportionnalité  $-mc^2$  a été ajoutée par convention ( $m$  est la masse de la particule). Puisque  $d\tau = dt/\gamma$ , on peut écrire

$$S_0 = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (4.89)$$

Le lagrangien d'une particule libre est donc

$$L_0 = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (4.90)$$

Dans l'approximation non-relativiste ( $v \ll c$ ) on a  $\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 - v^2/2c^2$  et donc

$$L_0 \approx -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (4.91)$$

On retrouve donc le lagrangien habituel, plus une constante ( $-mc^2$ ) qui n'affecte pas les équations du mouvement.

L'impulsion généralisée  $\mathbf{p}$  est définie comme

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.92)$$

La fonction de Hamilton (hamiltonien) qui correspond à ce lagrangien est

$$\begin{aligned} H_0 &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L_0 \\ &= \frac{m\mathbf{v}^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (4.93)$$

L'hamiltonien est dans ce cas égal à l'énergie cinétique de la particule. Dans l'approximation non relativiste,  $H$  devient

$$H_0 \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (4.94)$$

On reconnaît l'énergie cinétique usuelle, plus une constante : l'énergie au repos  $mc^2$ .

#### 4.5.2 Action invariante d'une particule chargée dans un champ

Considérons maintenant non pas une particule libre, mais une particule chargée dans un champ. À l'action  $S_0$  de la particule libre on doit ajouter une action  $S_1$  décrivant l'interaction de cette particule avec le champ électromagnétique. Cette action doit bien sûr être invariante. Nous allons vérifier que cette action est donnée par

$$S_1 = -\frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu \quad (4.95)$$

où  $e$  est la charge de la particule,  $A_\mu$  est le quadri-vecteur du potentiel électromagnétique et l'intégrale est effectuée sur la trajectoire de la particule. Comme l'intégrand est la contraction de deux quadri-vecteurs, il est forcément invariant. Cette action peut aussi s'exprimer ainsi :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{e}{c} \int (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - c\Phi dt) \\ &= \int dt \left\{ \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\Phi \right\} \end{aligned} \quad (4.96)$$

L'action à considérer est l'action totale  $S_0 + S_1$  ou son lagrangien :

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\Phi \quad (4.97)$$

Il s'agit de la version relativiste du Lagrangien apparaissant à l'Éq. (2.24). Nous allons ici reprendre le développement effectué auparavant en page 53 et évoqué en page 75, dans un contexte pleinement relativiste. Le moment généralisé est

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (4.98)$$

L'hamiltonien correspondant est

$$H = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\Phi \quad (4.99)$$

où il est compris que la vitesse  $\mathbf{v}$  doit être remplacée par  $(\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c)/m\gamma$  (*couplage minimal*). Dans l'approximation non relativiste, l'hamiltonien devient

$$H \approx mc^2 + \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c)^2 + e\Phi \quad (4.100)$$

Pour vérifier que nous avons fait le bon choix de lagrangien au départ, nous allons obtenir les équations du mouvement et s'assurer qu'elles coïncident avec la force de Lorentz. Les équations de Lagrange sont, dans ce cas,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{A}} - \frac{e}{c} v_i (\nabla A_i) + e\nabla\Phi \quad (4.101)$$

Le premier terme du membre de gauche est par définition la force  $\mathbf{F}$  (la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps). On peut donc écrire

$$\mathbf{F} = -e\nabla\Phi - \frac{e}{c}\dot{\mathbf{A}} + \frac{e}{c}v_i\nabla A_i \quad (4.102)$$

Notons que la dérivée temporelle  $\dot{\mathbf{A}}$  est une dérivée *totale* par rapport au temps et non une dérivée partielle. Cette dérivée est non seulement due à la variation temporelle de  $\mathbf{A}$  à une position donnée, mais aussi au déplacement de la particule dans le temps d'un point à un autre :

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} \quad (4.103)$$

mais

$$-v_j\partial_j A_i + v_j\partial_i A_j = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{krs}v_j\partial_r A_s = (\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}))_i \quad (4.104)$$

Donc on obtient finalement

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (4.105)$$

Ce qui est effectivement la force de Lorentz.

### 4.5.3 Action du champ

Le champ électromagnétique constitue aussi en lui-même un système mécanique, avec un nombre infini de degrés de liberté: on peut affirmer que les degrés de liberté du champ sont les valeurs du potentiel électromagnétique à toutes les positions possible, ce qui constitue un continuum de degrés de liberté. Malgré l'apparente complexité du système, on peut écrire une action pour le champ; les équations de Lagrange qui en découlent coïncident alors avec les équations de Maxwell.

L'action pour le champ électromagnétique doit avoir la forme suivante :

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) \quad (4.106)$$

où  $\mathcal{L}$  est la *densité lagrangienne* et  $d^4x = d^3r dt$ . Le lagrangien est alors l'intégrale de la densité lagrangienne sur l'espace :

$$L = \int d^3r \mathcal{L} \quad (4.107)$$

De plus, cette action doit consister de deux parties : une décrivant la dynamique propre du champ et une décrivant l'interaction du champ avec la matière chargée. Cette dernière partie nous est déjà connue : il s'agit de  $S_1$  ci haut. En exprimant cette dernière en fonction du quadri-vecteur de densité de courant au lieu de la quadri-vitesse, on a

$$S_1 = -\frac{1}{c} \int d^4x J^\mu A_\mu \quad (4.108)$$

Il reste à trouver  $S_0$ , l'action propre du champ ou la densité lagrangienne correspondante  $\mathcal{L}_0$

Pour que  $S_0$  soit invariant, il faut que  $\mathcal{L}_0$  aussi soit invariant; mais attention! le lagrangien, lui, n'est pas invariant. La raison en est que l'élément de volume d'espace-temps  $d^4x$  est invariant par rapport aux transformations de Lorentz, alors que  $d^3r$  ne l'est pas. En effet,

$$d^4x' = \det \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right) d^4x = \det \Lambda d^4x \quad (4.109)$$

où  $\Lambda$  est la matrice de la transformée de Lorentz. On vérifie sans peine que  $\det \Lambda = 1$ . Donc  $d^4x' = d^4x$  ou  $d^3r'dt' = d^3r dt$ . Mais  $dt' \neq dt$ , et donc  $d^3r' \neq d^3r$ .

Par analogie avec la mécanique d'une particule, on veut que  $\mathcal{L}_0$  dépende de  $A_\mu$  et de ses premières dérivées. Comme les équations de Maxwell sont linéaires, il faut que  $\mathcal{L}_0$  soit au plus quadratique dans les champs. La seule possibilité invariante est alors

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \quad (4.110)$$

Le facteur de  $-1/16\pi$  a été ajouté dans le but de retrouver les équations de Maxwell dans leur normalisation habituelle par rapport au courant. La densité lagrangienne totale est donc

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{c} J^\mu A_\mu - \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \quad (4.111)$$

Utilisons maintenant le principe de la moindre action pour obtenir les équations du mouvement. Il faut pour cela ajouter une variation  $\delta A_\mu$  au quadri-vecteur du potentiel et s'assurer que la variation correspondante de l'action est nulle au premier ordre. Notons que

$$\delta(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = 2F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = 4F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu \quad (4.112)$$

Donc la variation de l'action est

$$\delta S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{c} J^\nu \delta A_\nu - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu \right\} \quad (4.113)$$

En intégrant le deuxième terme par parties, on trouve

$$\delta S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{c} J^\nu + \frac{1}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu} \right\} \delta A_\nu \quad (4.114)$$

Si cette variation s'annule pour n'importe quelle variation  $\delta A_\nu$ , il faut que le tenseur électromagnétique satisfasse aux équations suivantes :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (4.115)$$

Cette équation constitue une partie des équations de Maxwell. L'autre partie provient de la définition même de  $F_{\mu\nu}$  en fonction de  $A_\mu$  et peut être exprimée comme  $\partial_\mu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0$  (voir ci-haut).

#### 4.5.4 Tenseur d'énergie-impulsion

Un autre tenseur utile dans la description des champs électromagnétiques est le tenseur d'énergie-impulsion, défini par

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( F^{\mu\lambda} F_{\lambda}{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\lambda} F_{\rho\lambda} \right) \quad (4.116)$$

Ce tenseur est manifestement symétrique et sa trace est nulle :

$$\text{Tr } \bar{T} = T^\mu{}_\mu = 0 \quad (4.117)$$

puisque  $\text{Tr } 1 = 4$ .

Un calcul explicite donne les expressions suivantes pour les différentes composantes de  $\mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned} T^{ij} &= -\frac{1}{4\pi} \left( E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \right) \\ T^{0k} &= \frac{1}{c} S_k \\ T^{00} &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \mathcal{E} \end{aligned} \quad (4.118)$$

La partie spatiale de  $\mathbb{T}$ , en fait la matrice  $-T_{ij}$ , porte le nom de *tenseur des contraintes de Maxwell*.

Le tenseur d'énergie-impulsion satisfait à la condition suivante :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{c} F^{\lambda\nu} J_\lambda \quad (4.119)$$

Pour démontrer cette relation, il suffit de faire le calcul explicite :

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} \left( \partial_\mu F^{\mu\lambda} F_\lambda^\nu + F^{\mu\lambda} \partial_\mu F_\lambda^\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu F^{\rho\lambda} F_{\rho\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{4\pi}{c} J^\lambda F_\lambda^\nu + \frac{1}{2} F^{\mu\lambda} (\partial_\mu F_\lambda^\nu - \partial_\lambda F_\mu^\nu) + \frac{1}{2} \partial^\nu F^{\rho\lambda} F_{\rho\lambda} \right) \end{aligned} \quad (4.120)$$

Dans la deuxième équation, nous avons utilisé les équations de Maxwell et nous avons anti-symétrisé le second facteur du deuxième terme. Les trois derniers termes peuvent aussi s'écrire

$$\frac{1}{2} g^{\nu\alpha} F^{\rho\lambda} (\partial_\rho F_{\lambda\alpha} + \partial_\lambda F_{\alpha\rho} + \partial_\alpha F_{\rho\lambda}) \quad (4.121)$$

après avoir changé les indices de sommation et transposé au besoin. On reconnaît entre parenthèses le deuxième groupe d'équations de Maxwell. Ce terme s'annule donc et il reste l'équation (4.119).

L'interprétation physique de la relation (4.119) est la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Pour le démontrer, considérons premièrement la composante  $\nu = 0$  ce cette relation :

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu 0} &= \frac{1}{c} F^{\lambda 0} J_\lambda \\ &= -\frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \end{aligned} \quad (4.122)$$

Intégrons cette dernière relation dans un volume  $V$ , en utilisant l'expression (4.50) pour le courant associé à un ensemble de charges ponctuelles :

$$\begin{aligned} \int_V d^3r \partial_\mu T^{\mu 0} &= -\frac{1}{c} \sum_i q^{(i)} \mathbf{v}^{(i)} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}^{(i)}) \\ &= -\frac{1}{c} \frac{dW}{dt} \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r T^{00} + \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial x^k} T^{k0} \end{aligned} \quad (4.123)$$

où  $W$  est l'énergie cinétique des sources du champ contenue dans le volume  $V$ . Dans la dernière équation, le dernier terme est l'intégrale de la divergence d'un vecteur et peut se ramener à une intégrale de surface. On écrit donc

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ W + \int_V d^3r T^{00} \right\} = -c \oint_S da_k T^{k0} \quad (4.124)$$

Ceci signifie que le vecteur dont les composantes sont  $cT^{k0}$  est le flux de la quantité apparaissant dans le membre de gauche, c'est-à-dire l'énergie. Ce vecteur n'est rien d'autre que  $\mathbf{S}$ , le vecteur de Poynting, et la densité d'énergie du champ électromagnétique est  $T^{00} = (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)/8\pi$ .

Passons maintenant aux composantes spatiales ( $\nu = i$ ) de l'équation (4.119). Reprenant le calcul précédent, on trouve

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu i} &= \frac{1}{c} F^{\lambda i} J_\lambda \\ &= -E_i \rho - \frac{1}{c} \varepsilon_{ikl} B_l J_k \\ &= - \left( \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} \right)_i \end{aligned} \quad (4.125)$$

car  $F^{ik} = \varepsilon_{ikl} B_l$ . En utilisant l'expression du courant et de la densité de charge pour des particules ponctuelles et en intégrant sur un volume  $V$ , le membre de droite devient la force de Lorentz totale exercée sur les particules comprises dans ce volume :

$$\begin{aligned} \int_V d^3r \partial_\mu T^{\mu i} &= -(\mathbf{F}_{\text{tot.}})_i \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r T^{0i} + \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial x^k} T^{ki} \end{aligned} \quad (4.126)$$

Le deuxième terme est l'intégrale d'une divergence et se transforme en intégrale de surface : cette relation devient donc

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ (\mathbf{p}_{\text{tot.}})_i + \frac{1}{c} \int_V d^3r T^{0i} \right\} = - \oint_S da_k T^{ki} \quad (4.127)$$

où  $\mathbf{p}$  est l'impulsion totale des sources du champ dans le volume  $V$ . L'interprétation de cette équation est que  $T^{0i}/c$  est la composante  $i$  de la densité de l'impulsion du champ électromagnétique et que le vecteur dont les composantes sont  $T^{ki}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) est le flux de la composante  $i$  de l'impulsion du champ. La densité d'impulsion est donc reliée au vecteur de Poynting :

$$\text{densité d'impulsion : } \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad (4.128)$$

Dans le cas statique (aucune dépendance en temps), la force totale exercée sur les sources par le champ est donc

$$(\mathbf{F}_{\text{tot.}})_i = - \oint_S da_k T^{ki} \quad (4.129)$$

## Problèmes

### Problème 4.1

Un peu de science-fiction. Supposons qu'il soit possible de construire un vaisseau spatial capable de transporter des êtres vivants d'un système planétaire à un autre. Dans le but d'offrir une gravitation 'artificielle' aux passagers, l'astronave évolue avec une accélération constante  $g$  dans son référentiel propre (c.-à-d. le référentiel inertiel dont la vitesse coïncide avec celle de l'astronave à un moment donné). On suppose que cette accélération est maintenue jusqu'à mi-chemin, pour ensuite être renversée (changement de signe) jusqu'à destination. Si  $d$  est la distance parcourue (référentiel terrestre), quel est le temps  $T$  que prend le voyage, tel que mesuré par les passagers ? Si  $g = 10 \text{ m/s}^2$  et  $d = 4,3$  années-lumière (distance de l'étoile la plus proche) quel est le temps requis ? Quel serait  $T$  pour  $d = 2 \times 10^6$  années-lumière (distance de la galaxie d'Andromède) ?

### Problème 4.2

Un long fil rectiligne, orienté selon  $\hat{\mathbf{x}}$ , au repos dans le référentiel  $S$ , porte un courant continu  $I$ . Un référentiel  $S'$  se déplace à une vitesse  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$  par rapport à  $S$ . Quels sont les champs électrique et magnétique dans  $S'$  (en fonction de la distance par rapport au fil) et à quelles densités de charge et quel courant sont-ils attribuables ?

### Problème 4.3

Une charge ponctuelle  $e$  évolue dans des champs électrique ( $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{y}}$ ) et magnétique ( $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ ) uniformes et perpendiculaires, tels que  $E \ll B$ . Donnez une expression pour la trajectoire de la particule en fonction du temps (c'est-à-dire  $(x(t), y(t), z(t))$ ) en supposant que  $\mathbf{r}(0) = 0$  et  $\dot{\mathbf{r}}(0) = 0$ . Pour ce faire, transportez-vous dans le référentiel où  $\mathbf{E} = 0$ , trouvez la trajectoire dans ce référentiel et ensuite transformez le tout dans le référentiel original. Supposez toujours que  $E \ll B$  et montrez que la trajectoire est une cycloïde (tracez-la!).

### Problème 4.4

Une onde plane a la forme suivante :

$$\psi(\mathbf{r}, t) \propto \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

En partant du principe que la phase de l'onde est un invariant, montrez que la quantité  $(\omega/c, \mathbf{k})$  est un quadri-vecteur contravariant. Dans un référentiel  $S$  une onde électromagnétique plane se propage dans le vide à une fréquence  $\omega$ . Soit  $S'$  un référentiel se déplaçant à une vitesse  $\mathbf{v}$  par rapport à  $S$ . La fréquence  $\omega'$  de l'onde dans  $S'$  est différente (effet Doppler). Si  $\mathbf{v}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ , montrez que

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{effet Doppler transverse})$$

Si, au contraire,  $\mathbf{v}$  est parallèle à  $\mathbf{k}$ , montrez que

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad (\text{effet Doppler longitudinal})$$



## Facteurs de conversion SI-gaussien

Quantité	SI		gaussien
longueur	1 mètre	$10^2$	centimètre
temps	1 seconde	1	seconde
masse	1 kilogramme	$10^3$	gramme
force	1 newton	$10^5$	dyne
énergie	1 joule	$10^7$	erg
puissance	1 watt	$10^7$	erg/s
charge électrique	1 coulomb	$3 \cdot 10^9$	statcoulomb
potentiel électrique	1 volt	1/300	statvolt
champ électrique <b>E</b>	1 volt/m	$(1/3) \cdot 10^4$	statvolt/m
polarisation	1 coulomb/m <sup>2</sup>	$3 \times 4\pi \cdot 10^5$	statcoulomb/cm <sup>2</sup>
résistance	1 ohm	$(1/3)^2 \cdot 10^{-11}$	statohm
conductivité	1 mho/m	$(3)^2 \cdot 10^9$	1/sec
capacité	1 farad	$(3)^2 \cdot 10^{11}$	statfarad
induction magnétique <b>B</b>	1 weber/m <sup>2</sup>	$10^4$	gauss
champ magnétique <b>H</b>	1 ampere/m	$(4\pi) \cdot 10^{-3}$	oersted
aimantation	1 weber/m <sup>2</sup>	$(1/4\pi) \cdot 10^4$	gauss
inductance	1 henry	$(1/3)^2 \cdot 10^{-11}$	stathenry

Note : le chiffre 3 apparaissant dans la troisième colonne signifie en fait la valeur numérique de la vitesse de la lumière (divisé par  $10^8$ ), à savoir 2,99792.

# Variables Électromagnétiques, SI vs gaussien

Quantité	SI	gaussien
$\mathbf{D}$	$\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$	$\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$
$\mathbf{H}$	$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$
$\nabla \cdot \mathbf{D}$	$\rho$	$4\pi \rho$
$\nabla \cdot \mathbf{B}$	0	0
$\nabla \times \mathbf{E}$	$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
$\nabla \times \mathbf{H}$	$\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\frac{1}{c} \left( 4\pi \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$
$\mathbf{F}$	$q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$	$q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$
$\mathbf{S}$	$\mathbf{E} \times \mathbf{H}$	$\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$

# Formulaire

analyse vectorielle :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} &= \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}\end{aligned}$$

coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}\nabla &= \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\nabla &= \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\end{aligned}$$

coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}\nabla &= \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

---

# Bibliographie

E. BORIDY, *Électromagnétisme : théorie et applications*, Presses de l'Université du Québec, 1992. Un ouvrage très accessible, couvrant un large spectre de sujets, sauf sur les ondes électromagnétiques. Utilise le système MKSA (SI)

D. CORSON & P. LORRAIN, *Electromagnetic Fields and Waves*, New-York, Freeman & Cie, 1988. Un ouvrage de niveau comparable à celui du cours, assez détaillé. Utilise le système MKSA (SI). Il existe une version française d'une édition antérieure sous le titre *Champs et Ondes Électromagnétiques*.

J.D. JACKSON, *Classical Electrodynamics*, Wiley, 1975. La 'bible' de l'électrodynamique classique. Idéal pour un cours de maîtrise. À consulter pour une compréhension plus en profondeur et pour un approfondissement des méthodes mathématiques. Utilise le système gaussien.

L. LANDAU & E. LIFCHITZ, *Théorie des Champs*, Moscou, éditions MIR, 1970. Un ouvrage profond et succinct, pour amateurs avertis. Il contient quelques problèmes sérieux résolus de manière magistrale. Couvre les principes fondamentaux, la propagation et le rayonnement des ondes, mais dans le vide seulement. Le titre de la version anglaise, aussi disponible, est *Classical Theory of Fields*. Utilise le système gaussien.

L. LANDAU & E. LIFCHITZ, *Électrodynamique des milieux continus*, Moscou, éditions MIR, 1969. Ce volume traite entre autres des milieux conducteurs, diélectriques, magnétiques et de la propagation des ondes dans ces milieux.

J.B. MARION & M.A. HEALD, *Classical Electromagnetic Radiation*, Hartcourt Brace Jovanovich, 1980. Ce manuel porte principalement sur la propagation et le rayonnement des ondes électromagnétiques, mais comporte des chapitres préliminaires utiles. Utilise le système gaussien.

M. PLONUS, *Applied Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, 1978. Un ouvrage de niveau simple, comportant de nombreuses applications pratiques. Utilise le système MKSA (SI).

---

# Index

- action d'une particule chargée, 102
- action du champ électromagnétique, 103
- aimantation, définition, 59
- Alembert, solution de d', 77
- Ampère, loi d', 49
  
- Biot et Savart, loi de, 48
- Bohr, rayon de, 29, 61
- Boltzmann, distribution de, 29
  
- capacité, 14
- capacité, sphères concentriques, 15
- champ électrique, 5
- champ magnétique, 48
- champ magnétique dans et autour d'une sphère aimantée, 65
- champ magnétique dans un barreau aimanté, 64
- champ magnétique, définition, 59
- charge liée, 31
- charge ponctuelle en mouvement uniforme, 99
- charge, densité de, 5
- Child-Langmuir, loi de, 8
- ciel bleu, explication du, 82
- condensateur, force sur un diélectrique, 37
- conductivité, 12
- contraction des indices, 91
- contraction des longueurs, 89
- contravariant, indice, 90
- Coulomb, loi de, 4
- couplage minimal, 102
- couple sur une distribution de charge, 20
- courant de déplacement, 70
- courant électrique, 11
- courant, densité de, 11
- covariant, indice, 90
- covariante, équation, 96
- Curie, loi de, 30
  
- diamagnétisme, 60
- diélectrique, 28
- diélectrique, constante, 32
- diffusion de la lumière, 82
  
- dilatation du temps, 89
- dipolaire, rayonnement, 80
- dipôle électrique, 16
- dipôle magnétique, 52
- dipôle magnétique d'un disque en rotation, 55
- dipôle magnétique d'un ensemble de particules, 54
- dipôle magnétique d'une boucle de courant, 54
- dipôle magnétique, champ produit par un, 53
- dipôle magnétique, couple sur un, 57
- dipôle magnétique, force sur un, 56
- Drude, modèle de, 28
  
- échange, interaction d', 62
- électronique, polarisabilité, 29
- énergie électrostatique, dans un diélectrique, 35
- énergie potentielle, 19
- énergie potentielle d'un dipôle magnétique, 57
- énergie potentielle; d'une charge dans un champ, 8
- énergie, densité d', 106
- éther, 86
- événement, 88
  
- Faraday, loi de, 68
- ferromagnétisme, 62
- flux d'énergie d'une onde plane, 79
- flux électrique, 6
- flux magnétique, définition, 68
- force électrique; méthode générale de calcul, 36
- force électromotrice, 68
- force sur une distribution de charge, 20
  
- Gauss, loi de, 6
- Green, identité de, 21
- gyromagnétique, rapport, 54
  
- Helmholtz, théorème de, 83
  
- images, méthode des, 21
- impulsion, densité d', 76, 106
- inductance, 69
- inductance d'un tore carré, 70
- inductance mutuelle, coefficients d', 69
- induction électrique, 31

- induction magnétique, 48
- induction magnétique, fil conducteur, 50
- intervalle (relativité), 88
- invariants du champ, 98
- jauge de Coulomb, 72
- jauge de Lorentz, 72
- jauge, transformation de, 72
- Lagrange, fonction de, 101
- lagrangienne, densité, 103
- Laplace, équation de, 21, 41
- Larmor, formule de, 83, 100
- Larmor, fréquence de, 57
- Larmor, précession de, 57
- Legendre, polynômes de, 39
- limites, conditions aux ( $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$ ), 63
- limites, conditions aux ( $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$ ), 33
- Lorentz, transformation de, 88
- Maxwell, équations de, 71
- multipolaire, développement, 15
- multipôle, définition, 18
- nombre d'onde, 78
- Ohm, loi d', 12
- onde monochromatique, 78
- onde, équation d', 77
- ondes électromagnétiques, 77
- paraélectrique, polarisabilité, 29
- paramagnétisme, 61
- Poisson, équation de, 7
- polaires, molécules, 29
- polarisabilité, 28
- polarisabilité, dépendance en fréquence, 30
- polarisation, densité de, 31
- potentiel électrique, 7
- potentiel électrique dans un boîte, 23
- potentiel scalaire magnétique, 64
- potentiel vecteur, 49
- potentiels thermodynamiques, 36
- quadri-accélération, 94, 100
- quadri-courant, 94
- quadri-potentiel, 95
- quadri-vecteur, 90
- quadri-vitesse, 94
- quadrupôle électrique, 17
- Rayleigh, Lord, 82
- rayon classique de l'électron, 11
- rayonnement d'une charge accélérée, 100
- rayonnement dipolaire, 80
- rayonnement, zone de, 80
- référentiel inertiel, 86
- résonance magnétique, 58
- Rodrigues, formule de, 41
- séparation des variables, 22
- sphère conductrice, charge dans une, 26
- sphère conductrice, potentiel autour d'une, 25
- sphère diélectrique, 34
- structure fine, constante de, 61
- susceptibilité électrique, 32
- tenseur, 91
- tenseur d'énergie-impulsion, 104
- tenseur des contraintes de Maxwell, 105
- tenseur électromagnétique, 96
- tenseur électromagnétique dual, 97
- tenseur métrique, 92
- tournant, référentiel, 58
- travail virtuel, 36
- vecteur d'onde, 78
- volume, transformation de l'élément de, 89
- Zeeman, effet, 58