

Chapitre 9

Équations différentielles. Fonctions de Green

Il s'agit d'une part de rappeler des résultats concernant les équations différentielles, d'autre part de profiter d'un contexte familier pour introduire la notion de Fonction de Green

Il ne s'agit pas ici de refaire un cours sur les équations différentielles, mais de rappeler des résultats essentiels et de profiter d'un contexte en principe assez familier pour introduire, à propos des équations *linéaires*, la notion de *fonction de Green*, dont l'usage est très fréquent et très utile en Physique. Par ailleurs, la brève discussion autour des équations différentielles est aussi l'occasion de dire quelques mots sur leurs pendants discrets, les équations aux différences, qui apparaissent si souvent en Physique.

9.1 Généralités et définitions

Soit f une fonction de $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ dans $f(\mathcal{D}) \subseteq \mathbb{C}$, munies de toutes les dérivées $f', f'', \dots, f^{(m)}$ souhaitables¹. On appelle *équation différentielle* une relation entre f et certaines de ses dérivées satisfaite pour toutes les valeurs de la variable z (réelle ou complexe) où la fonction et ses dérivées sont définies. Formellement, une telle relation s'écrit toujours :

$$\Phi(z, f, f', \dots, f^{(m)}, \dots) = 0 \quad \forall z \in \mathcal{D} , \quad (9.1)$$

où $f^{(m)} = \frac{d^m f}{dz^m}$. Ainsi, les équations suivantes :

$$z^5 f'' + \frac{1}{z} f' + f = \pi , \quad z f' - 3f^2 = 0 , \quad f^{(4)} f^2 + 3 \sin z f = 0 , \quad f' + e^{f(z)} = 0 \dots \quad (9.2)$$

sont des équations différentielles.

La fonction f et la variable z sont *a priori* des quantités complexes, ce qui suppose implicitement que f est une fonction analytique ; en effet, dans le cas contraire, on ne saurait pas ce que signifie $f'(z)$! Il est tout à fait loisible de se restreindre au champ réel, en ne considérant qu'une variable réelle x , et une fonction $f(x)$ à valeurs réelles. Ce faisant, en un sens, on peut paradoxalement considérer des équations plus générales, dans la mesure où on ne sait pas toujours les prolonger à vue dans \mathbb{C} . Par exemple, l'équation différentielle réelle $f'(x) + |x| = 0$ ne peut recevoir de sens si on choisit x dans \mathbb{C} ; en effet, la fonction $|z|$ n'est pas holomorphe, donc la "dérivée" f' , égale à $-|x|$ d'après l'équation considérée, n'est pas définie. D'ailleurs, on sait que les fonctions analytiques sont des objets remarquables et robustes : forcément, les équations différentielles mettant en jeu de

¹ f peut aussi être à valeurs réelles. Si f est une fonction analytique, on sait qu'alors elle est infiniment dérivable.

telles fonctions sont elles-mêmes remarquables et ne peuvent prétendre à une forme d'universalité. Dans la suite, sauf exception dûment mentionnée, les équations différentielles étudiées porteront sur des fonctions analytiques dans un certain domaine \mathcal{D} . Les exemples donnés en (9.2) sont bien de cette espèce – notamment, toutes les fonctions jouant le rôle de coefficients sont analytiques, sauf en leurs points singuliers (isolés).

L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre de la plus haute dérivée y figurant explicitement. Les équations différentielles (9.2) sont respectivement d'ordre deux, un, quatre et un.

Il existe une variété infinie d'équations différentielles, ce qui incite à effectuer une classification permettant d'énoncer des théorèmes dont la validité repose sur certains traits caractéristiques de ces équations. La classification fondamentale distingue deux grandes espèces :

1. les équations *linéaires*, caractérisées par le fait que la fonction inconnue et ses dérivées apparaissent au plus à la puissance un (en particulier, une équation linéaire ne contient pas de termes du genre f^p , ff' , $f^{(n)}f^{(m)}$, ni de fonctions $\alpha(f)$, etc).

En outre, il est d'usage de distinguer les équations *homogènes*, où f et ses dérivées figurent dans tous les termes à la puissance un, les équations *inhomogènes* où figure un terme additif indépendant de f et de ses dérivées. Ainsi, les équations :

$$f'' + \frac{1}{z^2}f' + f = 0, \quad f^{(3)} + f = 0 \quad (9.3)$$

sont des équations linéaires et homogènes, alors que :

$$f^{(6)} + e^z f' + f - \ln z = 0 \quad (9.4)$$

est une équation linéaire inhomogène. Souvent, on place au second membre le terme indépendant de f , justifiant les appellations traditionnelles *équation avec ou sans second membre*, parfois commodes mais au fond sans grande utilité. Dans le cas homogène, si f est une solution, alors λf est encore solution, λ étant un nombre quelconque.

Au total, une équation différentielle linéaire d'ordre N est toujours plus précisément de la forme :

$$\sum_{n=0}^N a_n(z) f^{(n)}(z) = \phi(z) \quad (a_N \neq 0); \quad (9.5)$$

les coefficients a_n sont *a priori* des fonctions de z , le cas extrême étant celui où ce sont de simples constantes (on parle alors d'équation à coefficients constants) ; la fonction ϕ est donnée (on l'appelle souvent *source*) ; l'équation devient homogène si $\phi = 0$. Pour la référence ultérieure, notons que (9.5) peut s'écrire formellement comme suit :

$$\hat{L}f = \phi \quad (9.6)$$

où \hat{L} désigne l'opérateur différentiel :

$$\hat{L}(s) = \sum_{n=0}^N a_n(z) \frac{d^n}{dz^n}. \quad (9.7)$$

2. les équations *non-linéaires*, caractérisées par le fait que la fonction inconnue et ses dérivées apparaissent dans des monômes $(f^{(n)})^\lambda (f^{(m)})^\mu \dots$, ou dans des fonctions, sans aucune restriction. Les équations suivantes sont non-linéaires :

$$z^5 (f'')^2 + \frac{1}{z} f' + f = \pi, \quad \ln(f') - 5f = 0, \quad f' f^{(4)} + \frac{3}{f^2} \cosh z = z. \quad (9.8)$$

Il est bien clair que rien ne bride l'imagination quand il s'agit de donner un exemple d'équation non-linéaire...

La distinction linéaire – non-linéaire est absolument fondamentale. Pour des équations linéaires, on sait que l'ensemble des solutions peut être muni d'une structure d'espace vectoriel, ce qui permet d'énoncer de nombreux théorèmes concernant notamment l'existence et l'unicité des solutions. Pour les équations non-linéaires, la situation est nettement plus difficile, moins confortable, parfois même un peu acrobatique.

Ces deux types d'équations se rattachent à des mondes très différents. On peut dire que les équations linéaires décrivent des phénomènes très banals, ne conduisant à aucune vraie surprise. Au contraire, les équations non-linéaires contiennent une richesse incommensurable, et engendrent parfois des solutions exotiques, présentant de surcroît une extrême variabilité par rapport à des changements *a priori* anodins. On rencontrera quelques exemples dans la suite, mais il est utile de marquer la différence spectaculaire sur un premier exemple très simple.

L'équation linéaire :

$$f' + \frac{f}{z-1} = 0 \quad (9.9)$$

a pour solution² $f(z) = \frac{f(0)}{1-z}$, où $f(0)$ est la valeur (prescrite à l'avance – voir plus loin, section 9.2). $f(0)$ est un simple facteur qui ne change en rien la forme de la solution, et notamment n'affecte pas ses singularités, ici un unique pôle simple en $z = 1$ – la simple vision de l'équation (9.9) permet d'ailleurs de deviner que $z = 1$ est un point particulier, où il se passe quelque chose de remarquable.

Par contraste, soit l'équation non-linéaire :

$$f' = f^2 \quad (9.10)$$

Si on choisit $f(0) = 1$, la solution est :

$$f(z) = \frac{1}{1-z} . \quad (9.11)$$

Ainsi, en prenant $f(0) = 1$ dans les deux cas, les deux équations (9.9) et (9.10) ont exactement la même solution – et pourtant, la considération de (9.10) ne permet nullement de soupçonner que $z = 1$ est un point remarquable : un pôle apparaît spontanément dans la solution, que l'on aurait pas deviné en regardant l'équation (c'est pourquoi on parle de *singularité spontanée*). Maintenant, choisissons une autre condition initiale, par exemple $f(0) = 2$; la solution est alors $\frac{2}{1-2z}$: elle a encore un pôle, mais il est maintenant en $z = \frac{1}{2}$! Ce simple changement de condition initiale a profondément modifié la solution...

D'une façon générale, pour une équation linéaire du premier ordre $f' = \Phi(f, z)$, avec la condition $f(a) = A$, la solution existe et est une fonction analytique dans le voisinage de a pourvu que $\Phi(Z, z)$ soit une fonction analytique vis-à-vis de chacun de ses arguments en $Z = A$ et $z = a$. Rien de tel ne peut être affirmé pour une équation non-linéaire, pour laquelle le domaine d'analyticité et le rayon de convergence des solutions sont en général imprévisibles en raison précisément de la possibilité d'apparition spontanée de singularités.

Une autre différence spectaculaire entre équations linéaires et non-linéaires tient aux comportements comparés de leurs solutions avec celles de leurs équations aux différences équivalentes (voir section 9.5).

9.2 Conditions initiales. Conditions aux limites

Comme une équation différentielle implique des dérivées, sa résolution passe par des opérations d'intégration, qui introduisent inévitablement des constantes d'intégration. De ce fait, la seule donnée d'une équation différentielle permet, si on sait le faire, de trouver sa solution *générale*, qui forme un ensemble de cardinal infini en général.

En Physique, l'arrivée d'une équation différentielle est le résultat de la construction d'un modèle qui, pour une situation physique donnée (et un problème bien posé), ne peut donner qu'une et une seule solution. En d'autres termes, il ne suffit pas de disposer d'une équation différentielle, il convient de la compléter par des conditions suggérées par l'expérience que l'on veut décrire théoriquement, ou imposées par des principes

²obtenue par intégration immédiate !

physiques (celui de causalité par exemple), ou par le sens physique de la théorie en cours (par exemple, la nécessité pour la fonction d'onde d'un état lié d'être normalisable). Ainsi, s'agissant de trouver la dynamique d'une particule classique, il faut connaître sa vitesse et sa position initiales³ ; faute de quoi, on est dans l'impossibilité de trouver toutes les constantes d'intégration. On parle de problème *mal posé* si l'on ne dispose pas d'autant de conditions que nécessaire : un problème bien posé a une et une seule solution.

Il est d'usage de parler de *conditions initiales*, lorsque la variable est le temps. Par exemple, pour un oscillateur harmonique (bille ponctuelle de masse m attachée à un ressort parfait de constante de raideur k , à l'équilibre au point d'abscisse x_e), l'équation masse \times accélération = force s'écrit⁴ :

$$m\ddot{x}(t) = -k(x - x_e) \iff \ddot{x} = -\omega^2(x - x_e) \quad (k = m\omega^2) . \quad (9.12)$$

La solution générale est :

$$x(t) = x_e + A \cos \omega t + B \sin \omega t . \quad (9.13)$$

Si maintenant on dit que la position initiale est x_0 et la vitesse initiale v_0 , on peut écrire le système :

$$(x_e + A \cos \omega t + B \sin \omega t)_{t=0} = x_0 , \quad (-\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t)_{t=0} = v_0 \quad (9.14)$$

d'où l'on tire les expressions des deux constantes d'intégration A et B . De la sorte, la seule et unique solution est :

$$x = x_e + (x_0 - x_e) \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t ; \quad (9.15)$$

C'est bien l'écriture explicite des conditions initiales qui permet d'extraire l'unique solution physique associée à ces conditions de départ.

En fait, prescrire des valeurs données pour la solution (et ses dérivées) en un certain point n'est pas la seule façon de déterminer de façon unique la solution du problème (bien) posé. Par exemple, soit l'équation homogène du second ordre :

$$f''(x) - k^2 f(x) = 0 \quad (k \in \mathbb{R}_+) . \quad (9.16)$$

Sa solution générale est :

$$f(x) = A e^{+kx} + B e^{-kx} . \quad (9.17)$$

Supposons maintenant que, pour des raisons imposées par le problème examiné, la fonction f soit astreinte à être bornée et continue⁵. Alors, la solution acceptable physiquement est la seule et unique fonction :

$$f(x) = f(0) e^{-k|x|} , \quad (9.18)$$

obtenue en supprimant dans l'expression générale (9.17) l'exponentielle divergente selon le signe de x . Dans ce cas, il reste à dire ce que vaut $f(0)$, par d'autres considérations⁶.

Enfin, il faut savoir que le nombre de paramètres dont dépend au total la solution la plus générale peut être *supérieure* à l'ordre de l'équation. Par exemple, la solution générale de l'équation réelle non linéaire du premier ordre $f' = f^{\frac{1}{3}}$ est telle que $f^{2/3} = \frac{2}{3}(x + C)$, où C est quelconque. L'extraction de la racine donne $f(x) = \alpha [\frac{2}{3}(x + C)]^{\frac{3}{2}}$, avec $\alpha = \pm 1$; dans ce cas précis, on peut aussi dire qu'il y a deux familles de solutions, associées aux deux branches distinctes solutions de $(e^{2ik\pi})^{3/2}$, chaque branche contenant une constante d'intégration C .

³Ainsi, il faut deux conditions initiales par degré de liberté, puisque l'équation fondamentale de la dynamique est du deuxième ordre en temps.

⁴ x_e désigne l'abscisse du point d'équilibre.

⁵C'est exactement le cas pour les équations aux valeurs et fonctions propres rencontrées en Mécanique quantique.

⁶Les experts en Mécanique quantique auront reconnu en (9.16) l'équation aux valeurs propres pour une particule liée par un potentiel attractif $-g\delta(x)$ ($g > 0$), équation écrite pour $x \neq 0$. Le saut de la dérivée f' en $x = 0$ est pilotée par l'intensité g de δ , représentant la "profondeur" du puits. Dans ce contexte, la valeur $f(0)$ s'obtient en écrivant la condition de normalisation de la fonction d'onde.

9.3 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

9.3.1 Rappel de quelques résultats

La forme générale d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre N à coefficients constants est :

$$\sum_{n=0}^N a_n f^{(n)}(z) = 0 \quad (a_N \neq 0) \iff \hat{L}f(z) = 0 . \quad (9.19)$$

Pour obtenir sa solution, il suffit de remarquer que tout repose d'une part sur la fonction exponentielle, douée de sa propriété caractéristique (la dérivée est proportionnelle à la fonction elle-même – de proche en proche, c'est vrai pour toute dérivée d'ordre quelconque), d'autre part sur le fait que l'équation étant linéaire, toute combinaison linéaire de solutions est encore solution.

La fonction exponentielle est en effet la seule à posséder la propriété suivante⁷ :

$$\frac{d^m}{dz^m} e^{\lambda z} = \lambda^m e^{\lambda z} \quad (m \in \mathbb{N}) \iff [f^{(m)}(z) = \lambda^m f(z) \iff f(z) = e^{\lambda z}] . \quad (9.20)$$

Il en résulte immédiatement que si l'on injecte la forme $f(z) = e^{\lambda z}$ dans (9.19), on trouve :

$$\left(\sum_{n=0}^N a_n \lambda^n \right) e^{\lambda z} = 0 \quad \forall z . \quad (9.21)$$

Cette équation n'est satisfaite que si λ est l'une des racines du polynôme de degré N , $P_N(\lambda)$ construit avec les coefficients a_n de l'équation différentielle et appelé *polynôme caractéristique* :

$$\sum_{n=0}^N a_n \lambda^n = 0 \iff P_N(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{\lambda_k\}_{1 \leq k \leq N} . \quad (9.22)$$

Maintenant, par construction, chaque fonction $f_k = e^{\lambda_k z}$ est solution de l'équation :

$$\left(\sum_{n=0}^N a_n \lambda_k^n \right) e^{\lambda_k z} = 0 \iff P_N(\lambda_k) e^{\lambda_k z} = 0 \iff \hat{L}f_k(z) = 0 ; \quad (9.23)$$

Par ailleurs, \hat{L} est un opérateur linéaire, puisque l'opération de dérivation est une opération linéaire. De cette propriété découle l'égalité :

$$\hat{L}(\alpha\phi(z) + \beta\psi(z)) = \alpha\hat{L}\phi(z) + \beta\hat{L}\psi(z) , \quad (9.24)$$

où les constantes α et β sont quelconques, tout comme les fonctions ϕ et ψ . Il en résulte immédiatement que toute combinaison linéaire des solutions particulières $e^{\lambda_k z}$:

$$f(z) = \sum_{k=1}^N C_k e^{\lambda_k z} \quad (9.25)$$

est solution de (9.19), *quels que soient les coefficients*⁸ C_k . En effet :

$$\hat{L} \left(\sum_{k=1}^N C_k e^{\lambda_k z} \right) = \sum_{k=1}^N C_k \hat{L} e^{\lambda_k z} ; \quad (9.26)$$

comme $\hat{L}e^{\lambda_k z} = 0$ par construction, la dernière somme est nulle, quels que soient les C_k , et l'équation différentielle est bien satisfaite par l'expression (9.25).

⁷D'où, en particulier, le développement de Taylor infini $e^{\lambda z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} (\lambda^n e^{\lambda z})_{z=0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \lambda^n$.

⁸On devine que cette propriété permet de doter l'ensemble des solutions d'une structure d'espace vectoriel de dimension N , égale à l'ordre de l'équation différentielle.

La fonction d'expression (9.25) est de fait la solution générale de l'équation : on peut en effet montrer que *toutes* les solutions de l'équation homogène (9.19) sont de cette forme.

Par le théorème fondamental de l'algèbre, le polynôme $P_N(\lambda)$ défini en (9.22) possède N zéros complexes λ_k et s'écrit après factorisation :

$$P_N(\lambda) = a_N \prod_{k=1}^N (\lambda - \lambda_k) ; \quad (9.27)$$

si tous les λ_k sont différents, les N fonctions $e^{\lambda_k z}$ sont linéairement indépendantes, et constituent une base de l'espace vectoriel des solutions.

Si plusieurs λ_k sont égaux entre eux, c'est-à-dire si l'équation $P_N(\lambda) = 0$ a des racines multiples (on dit aussi qu'il y a *dégénérescence*), alors le nombre de fonctions $e^{\lambda_k z}$ linéairement indépendantes est strictement inférieur à N . Par exemple, s'il n'existe qu'une racine multiple, λ_{k_0} , supposée d'ordre r , alors le polynôme P_N s'écrit $P_N(\lambda) = a_N (\lambda - \lambda_{k_0})^r \prod_{k=1}^{N-r} (\lambda - \lambda_k)$. Il est facile de vérifier que toutes les fonctions $z^p e^{\lambda_{k_0} z}$, $p = 0, 1, \dots, r-1$ sont solutions de l'équation, et elles sont visiblement linéairement indépendantes. Il s'ensuit que dans ce cas, la solution générale s'écrit :

$$f(z) = \left(\sum_{p=0}^{r-1} c_p z^p \right) e^{\lambda_{k_0} z} + \sum_{\lambda_k \neq \lambda_{k_0}} C_k e^{\lambda_k z} \quad (r \geq 1) . \quad (9.28)$$

Lorsque l'équation est inhomogène :

$$\sum_{n=0}^N a_n f^{(n)}(z) = \phi(z) \quad (a_N \neq 0) \iff \hat{L} f(z) = \phi(z) , \quad (9.29)$$

la solution la plus générale s'obtient en faisant la somme d'une solution particulière f_{part} et de la solution générale de l'équation homogène associée :

$$f(z) = f_{\text{part}}(z) + \sum_{k=1}^N C_k e^{\lambda_k z} . \quad (9.30)$$

En effet, la différence $f(z) - f_0(z)$ satisfait :

$$\sum_{n=0}^N a_n f^{(n)}(z) = 0 \quad (9.31)$$

dont la solution la plus générale est bien $\sum_{k=1}^N C_k e^{\lambda_k z}$. On verra que c'est dans ce cas que la méthode des fonctions de Green révèle toute son utilité (section 9.6) – tant qu'il n'est question que d'équations différentielles.

9.3.2 Résolution à l'aide de transformations intégrales

Il s'agit juste d'un rappel, pour la complétude. On a vu au ch. 7 que la transformation de Laplace permet de résoudre systématiquement les équations du genre (la variable est ici t) :

$$\sum_{p=0}^N a_p \frac{d^p f}{dt^p} = \phi(t) . \quad (9.32)$$

Si $F = \mathcal{L}[f]$, $\Phi = \mathcal{L}[\phi]$, la solution est :

$$F(z) = \frac{1}{Z(z)} \left[\Phi(z) + \sum_{p=1}^N a_p \sum_{r=0}^{p-1} z^{p-r-1} f^{(r)}(0) \right] \quad (9.33)$$

où $Z(z) = \sum_{p=0}^N a_p z^p$ est souvent appelé *fonction de transfert* – mais c’est aussi le polynôme caractéristique $P_N(z)$ introduit plus haut (voir (9.22)). Il s’agit bien de la solution générale, prenant en compte les N constantes d’intégration $f^{(r)}(0)$, $r = 0, 1, \dots, N-1$. L’inversion de Laplace fait apparaître les $e^{\lambda_k t}$, les λ_k étant les zéros de $Z(z)$ et donnant des pôles pour $F(z)$.

Notons que toutes les solutions d’une équation homogène à coefficients constants admettent une transformée de Laplace, puisqu’elles sont des combinaisons linéaires d’exponentielles $e^{\lambda_k t}$. Il en résulte que le formalisme ci-dessus est opérationnel dès que la source ϕ a également une transformée de Laplace.

On peut aussi utiliser la transformation de Fourier, dans l’hypothèse où toutes les transformées existent ; avec $\tilde{F}(\omega) = \mathcal{F}[f]$, $\tilde{\Phi}(\omega) = \mathcal{F}[\phi]$, on trouve :

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{\tilde{\Phi}(\omega)}{\sum_{p=0}^N a_p (-i\omega)^p} \equiv \frac{1}{Z(-i\omega)} \tilde{\Phi}(\omega) . \quad (9.34)$$

On sait que (9.34) ne représente pas la solution générale⁹(il n’y a pas de constantes d’intégration !), mais le *régime forcé*, effectivement indépendant des conditions initiales, et réalisé physiquement après extinction des transitoires à condition que tous les zéros λ_k de $Z(z)$ aient une partie réelle strictement négative¹⁰ – c’est bien ce fait qui assure l’amnésie vis-à-vis des valeurs initiales. C’est bien aussi ce que dit l’expression (9.33) : avec la condition ci-dessus pour tous les λ_k , la somme contenant les conditions initiales disparaît de fait dès que $t \gg (\min_k |\Re \lambda_k|)^{-1}$.

9.4 Équations différentielles linéaires à coefficients variables

Dans le cas homogène, une équation d’ordre N est de la forme :

$$\sum_{n=0}^N a_n(z) f^{(n)}(z) = 0 \quad (a_N(z) \neq 0) ; \quad (9.35)$$

la dépendance effective des coefficients par rapport à la variable z modifie du tout au tout la difficulté du problème. En effet, une exponentielle du genre $e^{\lambda z}$ n’est plus solution puisque le report dans (9.35) donne l’équation $(\sum_{n=0}^N a_n(z) \lambda^n) e^{\lambda z} = 0$, qui ne peut visiblement pas être satisfaite avec des $a_n(z)$ variables.

Toutefois, grâce au caractère linéaire de l’équation, on peut démontrer que la solution générale de cette équation est de la forme :

$$f(z) = \sum_{k=1}^N C_k E_k(z) , \quad (9.36)$$

où les $E_k(z)$ sont N solutions particulières linéairement indépendantes. Ainsi, grâce à la linéarité, l’ensemble des solutions peut à nouveau être muni d’une structure d’espace vectoriel. La grosse difficulté, quand les coefficients sont variables, consiste à trouver effectivement ces N solutions $E_k(z)$ – dans le cas où les coefficients sont constants, c’est au contraire en principe un jeu d’enfant de trouver les N solutions $e^{\lambda_k z}$, les λ_k étant les zéros du polynôme caractéristique $P_N(\lambda)$.

La méthode générale de résolution repose sur des théorèmes démontrés par Fuchs, précisant les conditions qui permettent de chercher les solutions sous la forme¹¹ $(z - z_0)^\alpha S(z)$, où α est un exposant (pas forcément entier) à déterminer, et où $S(z)$ est une série entière en $(z - z_0)$ dont les coefficients sont trouvés par une relation de récurrence¹² ; cette dernière s’obtient en reportant dans (9.35) la forme $f(z) = (z - z_0)^\alpha S(z)$ et en identifiant

⁹Mais, en exécutant les acrobaties décrites dans le ch 6, on peut cependant retrouver la solution générale en faisant réapparaître les constantes liées aux conditions initiales, et retomber bel et bien sur ses pieds.

¹⁰Dans le cas contraire, la solution diverge quand $t \rightarrow +\infty$ et ne saurait avoir une transformée de Fourier.

¹¹C’est possible quand z_0 est un point ordinaire ou un point singulier régulier.

¹²Le produit $(z - z_0)^\alpha S(z)$ porte le nom de série de Frobenius.

les termes de même puissance en $(z - z_0)$. Une telle relation dépend des valeurs “initiales” des c_n , fixées par l’application de conditions aux limites, ou par l’exigence que la fonction soit bornée en certains points.

C’est cette méthode qui est mise en œuvre, par exemple, en Mécanique quantique pour trouver les fonctions d’onde stationnaires de l’équation aux valeurs propres dans le cas d’une énergie potentielle V variant gentiment dans l’espace¹³. Pour mémoire, citons quelques équations apparaissant fréquemment en Physique :

- équation d’Airy¹⁴ : $f''(z) = zf(z)$
- équation de Weber - Hermite¹⁵ : $f''(z) + (\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^2)f(z) = 0$
- équation de Bessel¹⁶ : $f''(z) + \frac{1}{z}f'(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)f(z) = 0$.

9.5 Équations différentielles et équations aux différences

Montrons d’abord comment on peut mettre en parallèle une équation différentielle et une équation aux différences. Des équations de ce dernier type apparaissent souvent en Physique, soit directement, soit parce que le problème examiné, s’il s’exprime naturellement en termes de grandeurs continues, se résout plus agréablement avec des variables discrètes – ou inversement¹⁷. Les équations aux différences sont clairement d’usage universel dans les méthodes de résolution numérique d’équations que l’on ne sait pas traiter analytiquement, lorsqu’un algorithme de proche en proche ou itératif est utilisé.

Soit une suite de nombres f_n ($n \in \mathbb{N}$) obéissant à une certaine relation de récurrence. Par exemple :

$$f_{n+1} = \alpha f_n \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+) . \tag{9.37}$$

Ceci se réécrit trivialement :

$$f_{n+1} - f_n = (\alpha - 1)f_n \tag{9.38}$$

et se traduit en bon français en disant que la variation de f entre n et $n + 1$ est proportionnelle à la valeur de f au point n – clairement, on peut dire que le premier membre est une *dérivée discrète* : c’est le taux de variation de f_n pour une variation unité de la variable, l’entier n . Une valeur de départ f_0 étant donnée (à nouveau, outre l’équation, il faut se donner des conditions supplémentaires, ici une seule suffit), la solution de (9.37) est manifestement :

$$f_n = \alpha^n f_0 . \tag{9.39}$$

D’un autre point de vue, l’écriture (9.38) évoque une équation différentielle du genre :

$$f'(x) = kf(x) \tag{9.40}$$

en posant que la valeur de la fonction $f(x)$ aux points $x = n\Delta x$ est précisément égale à f_n . La solution de (9.40) est $f(x) = f(0)e^{kx}$. L’identification va jusqu’au bout en notant que :

$$f_n = \alpha^n f_0 = f_0 e^{n \ln \alpha} = f_0 e^{\left(\frac{\ln \alpha}{\Delta x}\right)(n\Delta x)} \equiv f(x = n\Delta x) . \tag{9.41}$$

¹³Pour $V(x)$ constant par morceaux, on évite la méthode de Fuchs en travaillant intervalle par intervalle, et en recollant les morceaux conformément aux prescriptions résultant du sens physique de la fonction d’onde (continuité de la fonction et de sa dérivée tant que $V(x)$ a des sauts *finis*).

¹⁴On la trouve souvent dans les problèmes d’optique, et elle arrive pour une particule quantique chargée soumise à un champ constant (par exemple, un électron soumis à un champ électrique indépendant du temps et uniforme dans l’espace – voir l’exemple d’application de la transformation de Laplace donné à la fin du ch. 7).

¹⁵rencontrée notamment à propos de l’oscillateur harmonique quantique.

¹⁶rencontrée partout en Physique. Bessel était astronome et a introduit ces fonctions qui portent depuis son nom en accomplissant l’analyse harmonique du problème de Kepler.

¹⁷De façon caricaturale, on pourrait dire que le théoricien face à un problème continu s’empresse de le discrétiser, et devant un problème discret ne peut s’empêcher de le “continuer”... En pratique, la continuation doit se faire avec discernement ; par exemple, une limite continue en temps doit respecter le Principe de causalité : l’apparition de fonctions $\delta(t)$ – en tant que limite de fonctions à mémoire courte – peut conduire à des difficultés, tant que l’on a pas réalisé que c’est plutôt $\delta^{(+)}(t)$ qui, de fait, est la bonne fonction à considérer. En outre, toutes les subtilités liés à l’alternative discret \leftrightarrow continu (voir notamment section 9.5) doivent rester présentes à l’esprit.

et à condition de poser $k = \frac{\ln \alpha}{\Delta x}$ (et bien sûr $f_0 = f(0)$).

Ceci étant fait, il est alors légitime d'affirmer que l'équation aux différences (9.37) (ou (9.38)) est la version discrète de l'équation différentielle (9.40). Ces deux écritures représentent finalement la même réalité : on peut dire que les f_n sont des points expérimentaux relevés quand on dispose de la résolution définie par Δx , et constituent la mesure de la grandeur théorique continue $f(x)$. En tout cas, les deux écritures, discrète et continue, se fondent l'une dans l'autre (il suffit d'imaginer que la résolution est de meilleure en meilleure, c'est-à-dire que Δx est rendu de plus en plus petit).

Cette quasi-coïncidence n'a pas hélas l'universalité que l'on pourrait espérer – d'ailleurs, l'identification complète exige de poser $k = \frac{\ln \alpha}{\Delta x}$, d'où l'importance du signe de α . Ce point s'éclaire en réalisant que l'assimilation d'une fonction $f(x)$ avec ses valeurs ponctuelles $f(n\Delta x)$ exige que, à l'échelle Δx , $f(x)$ soit une fonction *lentement variable*. Et de fait, si on prend $\alpha < 0$ dans (9.37), alors les différents f_n alternent en signe : la fonction $f(x)$ correspondante n'est sûrement pas à variation lente et on peut même dire intuitivement que, dans la limite $\Delta x \rightarrow 0$, cette fonction n'est certainement ni continue, ni dérivable.

Une question très importante est donc d'élucider les relations précises entre les solutions d'une équation aux différences et celles de son équation différentielle associée¹⁸. Les quelques exemples suivants donnent une idée de la difficulté du sujet, qui doit inciter à la prudence.

À titre de première illustration, changeons simplement le signe de α dans (9.37) en prenant maintenant :

$$f_{n+1} = -\alpha f_n \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+) , \quad (9.42)$$

dont la solution est $f_n = (-1)^{n+1} \alpha^{n+1} f_1$. L'équation différentielle correspondante se trouve en récrivant (9.42) sous la forme $f_{n+1} - f_n = -(\alpha + 1)f_n$, soit :

$$f'(x) = -(\alpha + 1)f(x) \iff f(x) = f(0) e^{-(\alpha+1)x} . \quad (9.43)$$

Sans aucun doute, les deux versions donnent des fonctions complètement différentes ; par exemple, si $\alpha > 1$, la solution discrète diverge en oscillant, alors que la version continue tend vers zéro exponentiellement vite ! La compréhension en profondeur de ces points assez subtils repose sur la considération des singularités des équations considérées¹⁹. Clairement, le traitement discret, inévitable sur ordinateur, des équations différentielles (même linéaires) exige un certain savoir-faire, et doit toujours être conduit avec discernement et vigilance.

De surcroît, la situation, en pratique, est rarement aussi simple : en général, une récurrence n'implique pas seulement deux termes consécutifs. Tout en maintenant l'aspect linéaire, on peut avoir des relations du genre :

$$f_{n+2} - \alpha f_{n+1} + \beta f_n = 0 ; \quad (9.45)$$

une telle récurrence est dite du *second ordre* puisque chaque f_n dépend des deux f_n précédents. (9.45) s'écrit aussi :

$$f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n = (\alpha - 2)f_{n+1} + (1 - \beta)f_n ; \quad (9.46)$$

Tout comme $f_{n+1} - f_n$ est la dérivée (première) discrète, $f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n \equiv (f_{n+2} - f_{n+1}) - (f_{n+1} - f_n)$ peut être considérée comme une dérivée seconde discrète.

Cette dernière remarque se généralise d'ailleurs comme suit. En définissant $Df_n = f_{n+1} - f_n$, on a :

$$Df_n = f_{n+1} - f_n , \quad D^2 f_n = D(Df_n) = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n , \quad \dots , \quad D^k f_n = \sum_{p=0}^k (-1)^p C_k^p f_{n+k-p} . \quad (9.47)$$

¹⁸ Une question particulièrement pertinente si un traitement numérique de l'équation différentielle s'impose. . .

¹⁹ C'est ici le cas parce que le point à l'infini est un *point singulier irrégulier*. De fait, la compréhension en profondeur de telles anomalies passe par l'analyse des points singuliers de l'équation différentielle. Très brièvement : on classe les singularités d'une équation différentielle linéaire en examinant les singularités (au sens de la théorie des fonctions analytiques) des coefficients apparaissant dans (9.5), réécrite de façon canonique (après division par $a_N(x)$) :

$$f^{(N)}(x) + p_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x) + \dots + p_1(x)f'(x) + p_0(x)f(x) = 0 ; \quad (9.44)$$

On dit que x_0 est un point singulier *régulier* si toutes les quantités $(x - x_0)^k p_{n-k}(x)$ sont analytiques dans un voisinage de x_0 , alors que certains coefficients $p_m(x)$ ont une singularité en x_0 . La définition s'étend au cas du point à l'infini en effectuant le changement de variable $X = \frac{1}{x}$. Un point qui n'est pas régulier est dit *irrégulier*, c'est le cas de $x = \infty$ dans l'exemple traité ci-dessus. Pour plus de détails, voir par exemple l'ouvrage de BENDER et ORSZAG, ch. 3.

En adoptant maintenant les correspondances :

$$f_n \leftrightarrow f(x = n\Delta x) , \quad D^k \leftrightarrow f^{(k)}(x) . \quad (9.48)$$

on est en mesure d'associer à une équation aux différences une et une seule équation différentielle, et réciproquement. Par exemple, en faisant apparaître $f_{n+1} - f_n$ au second membre de (9.46), l'équation différentielle associée à (9.45) par les règles (9.47) est :

$$f'' = (\alpha - 2)f' + (\alpha - \beta - 1)f . \quad (9.49)$$

Remarques

1. Les relations (9.48) peuvent s'écrire de façon plus formelle comme suit. Soit l'opérateur de translation²⁰ élémentaire \mathcal{T} défini comme :

$$\mathcal{T}f_n \stackrel{\text{déf}}{=} f_{n+1} . \quad (9.50)$$

Alors, $Df_n = (\mathcal{T} - 1)f_n$, $D^2f_n = (\mathcal{T} - 1)^2f_n, \dots, D^k f_n = (\mathcal{T} - 1)^k f_n$. Le développement de $(\mathcal{T} - 1)^k$ fait bien apparaître les coefficients du binôme comme en (9.47)

2. On pourrait aussi définir la dérivée discrète comme $Df_n = f_n - f_{n-1}$, ou $Df_n = \frac{1}{2}(f_{n+1} + f_n) - \frac{1}{2}(f_n + f_{n-1})$. Il ne s'agit en général que de détails conventionnels. Toutefois, la formulation de Feynman de la Mécanique quantique (intégrale de chemin) exige parfois un choix particulier, notamment en présence d'un champ magnétique.

À titre d'exemple d'une récurrence d'ordre deux²¹, soit :

$$f_{n+2} = f_n \iff f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n = -2(f_{n+1} - f_n) \quad (9.51)$$

dont, selon (9.47), l'équivalent continu est :

$$f'' = -2f' . \quad (9.52)$$

La solution générale de l'équation discrète est visiblement :

$$f_n = A + (-1)^n B \quad (A \text{ et } B \text{ constantes arbitraires}) , \quad (9.53)$$

cependant que la solution de l'équation différentielle est :

$$f(x) = C + De^{-2x} . \quad (9.54)$$

À nouveau, ces dernières solutions n'ont *a priori* aucun rapport avec les solutions (9.53) de l'équation discrète ! Notamment, le comportement à l'infini ($x \rightarrow \infty$) de l'expression (9.54) n'a rien à voir avec celui ($n \rightarrow \infty$) de (9.53). Tout au plus peut-on observer que les solutions lentement variables (en fait triviales puisqu'elles sont constantes) obtenues en prenant $B = D = 0$ coïncident ; en revanche, les solutions variables ($A = C = 0$ - ce sont en général les plus intéressantes !) n'ont strictement rien à voir l'une avec l'autre²².

Répetons que, même pour une équation linéaire, la discrétisation, ou l'opération inverse ("continuation") peuvent ne pas être des opérations innocentes. Pour être aussi complet que possible dans un tour d'horizon, on doit aussi faire remarquer que la résolution d'une version peut être un jeu d'enfant, alors que la résolution de l'autre est un tour de force ; exemple : $f_{n+1} - f_n = \frac{1}{f_n}$, dont la version continue est $f' = \frac{1}{f}$ - qui n'est pas vraiment

²⁰Le mot *translation* a un sens profond, indépendamment du choix évident de la terminologie (\mathcal{T} fait passer de n à $n + 1$. En effet, la dérivée est au cœur des opérateurs infinitésimaux de translation dans l'espace, que l'on rencontre par exemple en Mécanique quantique.

²¹Ce type de récurrence se résout en posant $f_n = r^n$, ce qui conduit à une équation algébrique de degré N pour l'inconnue r . On sait que l'on peut aussi résoudre en effectuant une transformation de Laplace (ch 7).

²²Autre exemple : la récurrence $f_{n+1} = nf_n$ et l'équation différentielle $f' = (x - 1)f$ sont équivalentes, selon la correspondance (9.47). Pourtant, les solutions respectives, $f_n = (n - 1)!f_1$ et $f(x) = f(0)e^{\frac{x^2}{2} - x}$ ont des comportements radicalement différents à l'infini : par la formule de Stirling, on a $f_n \sim n^n$, qui diverge infiniment plus vite que e^{x^2} .

difficile à résoudre... Autre exemple célèbre : la diabolique application logistique $f_{n+1} = rf_n(1 - f_n)$, $r > 0$, dont la version continue est réellement triviale²³.

A fortiori, une équation différentielle *non-linéaire* et sa version discrétisée peuvent avoir des solutions très différentes. Plus précisément, il peut arriver que la version discrète ait des solutions insoupçonnables au vu de la version continue : à nouveau, le diable est à l'œuvre et peut faire des intrusions spectaculaires en jouant le scénario des singularités spontanées (une telle catastrophe n'est pas toujours sûre, heureusement ou malheureusement, c'est selon).

Par exemple, soit l'équation différentielle :

$$f'(x) = f^2(x) - f(x) \quad (9.55)$$

que l'on cherche à résoudre avec la condition $f(0) = 2$. La solution est²⁴ :

$$f(x) = \frac{2}{2 - e^x} \quad (9.56)$$

et présente une divergence en $x = \ln 2$. L'équation aux différences correspondante est :

$$f_{n+1} - f_n = f_n^2 - f_n, \quad (9.57)$$

dont la solution²⁵, pour $f_0 = 2$, est $f_n = 2^{2^n}$, qui est finie pour tout n fini. Cette distinction est générale : contrairement à leurs équivalentes non-linéaires continues, les équations aux différences non-linéaires ne sont pas sujettes au phénomène d'apparition de singularités spontanées.

Il convient donc d'être toujours extrêmement prudent quand il s'agit de prévoir le comportement des solutions d'une équation différentielle au vu de celui des solutions de l'équation aux différences, ou inversement.

Ces résultats sont une source de perplexité, et en tout cas doivent inciter à la prudence. En effet, dès qu'il faut résoudre numériquement une équation, force est de recourir à la discrétisation : l'ordinateur ne connaît ni le continu, ni l'infini. La résolution numérique d'une équation différentielle linéaire ou non-linéaire exige donc un grand savoir-faire, et doit toujours être conduite avec vigilance. La règle méthodologique de base est d'avoir le constant souci de procéder à de multiples vérifications de la solution obtenue numériquement (symétries, stabilité vis-à-vis d'un bruit numérique forcé, comportements limites, ...).

Un canular numérique^a

Pour illustrer les remarques précédentes, citons un canular numérique. Soit la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = 111 - \frac{1130}{x_n} + \frac{3000}{x_n x_{n-1}}, \quad (9.58)$$

commençant avec $x_0 = 2$ et $x_1 = -4$. La relation de récurrence est du second ordre (elle met en jeu trois termes consécutifs) et non-linéaire : tout pour plaire.

On peut montrer que, avec ces valeurs de départ, la suite des nombres x_n a pour limite $x_\infty = 6$. Essayez de mettre cette limite en évidence en programmant l'itération sur une machine ne connaissant que les nombres^b...

Comme le dit l'auteur de l'article "*on observe parfois en machine une bonne et rapide convergence vers un résultat totalement faux*".

^aVoir l'article de J.-M. MULLER dans *La Recherche*, numéro spécial sur la théorie des nombres, juillet-août 1995.

^bEn revanche, les algorithmes formels du genre *Mathematica* se tirent bien d'affaire, à la condition expresse de n'effectuer aucune opération *numérique* pendant l'itération.

²³ On obtient l'équation différentielle $f' = (r - 1)f - f^2$.

²⁴ Poser $g = \frac{1}{f}$ conduit à une équation linéaire pour g .

²⁵ On trouve cette solution en posant $g_n = \log_2 f_n$, ce qui donne la récurrence linéaire $g_{n+1} = 2g_n$.

9.6 Fonctions de Green

Les fonctions de Green ne sont pas des fonctions spéciales (au sens où on parle de fonctions de Bessel, fonctions de Weber, fonctions d’Airy *etc*) : cette terminologie désigne en réalité un objet mathématique sur lequel est fondée une méthode de résolution des équations *linéaires*, qu’elles soient différentielles ou aux dérivées partielles (voir ch. 10). Dans cette section, sauf mention contraire, les variables seront supposées réelles.

S’agissant des équations différentielles, l’intérêt des fonctions de Green réside principalement en ceci : pour résoudre une équation inhomogène, il faut d’une part déterminer la solution générale de l’équation homogène qui lui est associée, d’autre part trouver une solution particulière de l’équation complète, puis faire la somme des deux et enfin caler les constantes d’intégration avec les données supplémentaires indispensables. La fonction de Green est un moyen systématique de trouver précisément cette solution particulière²⁶. En outre la méthode des fonctions de Green se prête bien à la rediscussion des liens importants entre conditions aux limites et analyticité (par exemple : causalité et analyticité).

Par ailleurs, s’il est certain que la méthode de Green révèle pleinement son utilité à propos des équations *aux dérivées partielles*, les idées de base peuvent déjà s’énoncer dans un contexte beaucoup plus simple, celui des équations différentielles : c’est ce qui est fait ci-dessous.

9.6.1 Préliminaires

La méthode des fonctions de Green fait un usage intensif de la fonction de Dirac, dont la règle opérationnelle fondamentale est, pour mémoire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0) dx = f(x_0) \tag{9.59}$$

où la fonction f est continue en x_0 . En prenant $f(x) = 1 \forall x$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) dx = 1 . \tag{9.60}$$

Dans les notations de la Théorie des distributions, et pour $x_0 = 0$, (9.59) s’écrit :

$$\langle \delta, f \rangle = f(0) ; \tag{9.61}$$

pour des fonctions s’annulant à l’infini, une intégration par parties permet de définir la “dérivée” de la fonction δ ; on trouve ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-x_0) dx = [\delta(x-x_0)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\delta(x-x_0) dx = -f'(x_0) ; \tag{9.62}$$

en prenant à nouveau $x_0 = 0$, ceci s’écrit formellement :

$$\langle \delta', f \rangle = -f'(0) . \tag{9.63}$$

$\delta(x-x_0)$ est une idéalisation de fonctions $\delta_\varepsilon(x-x_0)$, régulières et très pointues dont l’aire vaut 1 (précurseurs de δ). Si leur largeur autour de x_0 est ε , alors leur hauteur au maximum est d’ordre $\frac{1}{\varepsilon}$. Pour ces précurseurs, on a les relations approchées :

$$\int_a^b f(x)\delta_\varepsilon(x-x_0) dx \simeq f(x_0) , \quad \int_a^b \delta_\varepsilon(x-x_0) dx \simeq 1 \quad (a < x_0 < b, x_0 - a, b - x_0 \gg \varepsilon) , \tag{9.64}$$

  la condition expresse que $f(x)$ soit lentement variable à l’échelle ε . En raisonnant intuitivement avec les δ_ε et en passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0+$, on peut retrouver très rapidement tous les résultats utiles concernant les règles opérationnelles relatives à δ et à ses dérivées.

²⁶On connait également un autre moyen pour trouver une telle solution, c’est la méthode dite de *variation des constantes*.

En particulier, l'intégrale d'une δ_ε , $\int_a^x \delta_\varepsilon(x-x_0)dx$ ($a \ll x_0$), est une fonction de x , qui passe rapidement, sur une échelle d'ordre ε , de la valeur zéro à la valeur un (par exemple, la fonction $\delta_{\text{th},\varepsilon}(x-x_0) = \frac{1}{2}(1+\tanh \frac{x-x_0}{\varepsilon})$, avec $\varepsilon \ll 1$). À la limite $\varepsilon = 0+$, la primitive de δ est la fonction échelon-unité, nulle si $x < x_0$, égale à 1 si $x > x_0$ (sans qu'il soit nécessaire à ce stade de la définir en $x = x_0$). Si toutefois on utilise comme précurseur $\frac{1}{\pi\varepsilon} \sin \frac{x-x_0}{\varepsilon}$, le résultat de Dirichlet permet d'écrire très précisément²⁷ :

$$\int_{-\infty}^x \delta(x' - x_0) dx' = \begin{cases} 0 & \forall x < x_0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = x_0 \\ 1 & \forall x > x_0 \end{cases} \equiv \theta(x - x_0) ; \quad (9.65)$$

(il est en effet parfois nécessaire, pour des raisons physiques, de préciser la valeur en x_0) ; il en va d'ailleurs ainsi quand on prend $\delta_{\text{th},\varepsilon}(x - x_0)$. Quoi qu'il en soit dans les détails, le résultat à retenir est :

$$\theta(x - x_0) = \int_{-\infty}^x \delta(x' - x_0) dx' , \quad \frac{d}{dx} \theta(x - x_0) = \delta(x - x_0) . \quad (9.66)$$

On note à nouveau que l'opération d'intégration adoucit les irrégularités²⁸ : δ a deux sauts d'amplitude infinie au même point (l'un dans un sens, l'autre dans le sens contraire), alors que sa primitive n'a qu'un saut fini, d'amplitude unité d'ailleurs.

Ce phénomène se confirme maintenant en prenant la primitive de la fonction échelon :

$$\int_{a < x_0}^x \theta(x - x_0) dx = \begin{cases} 0 & \forall x < x_0 \\ x - x_0 & \forall x > x_0 \end{cases} , \quad (9.67)$$

qui est une fonction continue, y compris en x_0 . Ainsi, toute primitive non-triviale de θ , fonction discontinue, est une fonction continue. On peut aussi retenir les résultats inverses : si une fonction continue présente une rupture de pente en un point x_0 , sa dérivée a un saut fini, sa dérivée seconde contient un terme proportionnel à δ , etc :

$$f'(x) = f'_{\text{reg}}(x) + [f(x_0+0) - f(x_0-0)] \theta(x - x_0) , \quad f''(x) = f''_{\text{reg}}(x) + [f(x_0+0) - f(x_0-0)] \delta(x - x_0) , \quad (9.68)$$

où f'_{reg} et f''_{reg} désignent les dérivées obtenues par les moyens usuels.

Ainsi, la solution de l'équation²⁹ $f'' - g\delta(x) = 0$ est de la forme $f(x) = Ax + B + C|x|$, celle de $f' + g\delta(x - x_0) = 0$ est $f(x) = A + B\theta(x - x_0)$, etc. Dans tous les cas, le saut fini se produit dans la dérivée $f^{(N-1)}$ si l'équation est d'ordre N (si $N \geq 2$, la fonction elle-même est donc continue). Pour trouver ce saut, il suffit d'intégrer de part et d'autre du point de concentration de la fonction δ . Par exemple, pour la première équation, on trouve ainsi $f'(+0) - f'(-0) = g$, ce qui donne $2C = g$, d'où la solution générale $f(x) = Ax + B + \frac{g}{2}|x|$; pour la deuxième équation, on a $f(x_0+0) - f(x_0-0) = -g$, d'où $B = -g$ et la solution générale $f(x) = A - g\theta(x - x_0)$.

9.6.2 Définition des fonctions de Green

Soit une équation différentielle linéaire inhomogène :

$$\sum_{n=0}^N a_n(x) f^{(n)}(x) = \phi(x) \iff \hat{L}(x) f(x) = \phi(x) , \quad \hat{L}(x) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{n=0}^N a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} . \quad (9.69)$$

²⁷La fonction θ définie en (9.65) diffère donc de la fonction de Heaviside $Y(t)$ introduite dans le ch. 7 ; elle diffère également de la fonction Θ introduite dans le ch. 8 à propos des fonctions de répartition.

²⁸Comme la musique, l'intégration adoucit les mœurs.

²⁹L'équation de Poisson $\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ prend la forme $V'' = \frac{q\delta(x)}{\varepsilon_0}$ sur \mathbb{R} et pour une charge ponctuelle située à l'origine. C'est pourquoi, à une dimension d'espace, le potentiel coulombien, défini comme satisfaisant l'équation de Poisson, varie comme $|x|$, et non pas comme $\frac{1}{|x|}$ ($V(x) = -\frac{q}{2\varepsilon_0}|x| + \text{C}^{\text{ste}}$).

La (les) fonction(s) de Green de cette équation sont les fonctions satisfaisant l'équation où la source ϕ a été remplacée³⁰ par $\delta(x - x')$. Si on note $G(x, x')$ la fonction de Green, alors par définition de G :

$$\sum_{n=0}^N a_n(x) \frac{\partial^n}{\partial x^n} G(x, x') \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \delta(x - x') \iff \hat{L}(x) G(x, x') \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \delta(x - x') . \quad (9.70)$$

Ceci étant, une solution de (9.69) s'exprime alors comme :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x') \phi(x') dx' . \quad (9.71)$$

En effet, faisant passer $\hat{L}(x)$ sous l'intégrale en x' (commutant intégration et dérivations), on a selon (9.70) :

$$\hat{L}(x) f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{L}(x) G(x, x') \phi(x') dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x') \phi(x') dx' = \phi(x) , \quad (9.72)$$

qui reconstitue bien l'équation satisfaite par la fonction f . La fonction ainsi construite est donc *une* solution (particulière) de l'équation (9.69), dont la solution générale s'écrit :

$$f(x) = f_h(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x') \phi(x') dx' , \quad (9.73)$$

où $f_h(x)$ désigne la solution générale de l'équation homogène associée $\hat{L}f = 0$.

Autrement dit, une fois que l'on connaît la fonction de Green d'une équation différentielle, une solution particulière s'obtient par une simple intégrale, conformément à (9.71). Tout le travail consiste ainsi³¹ à déterminer la fonction de Green ; celui-ci fait, le passage d'une source à une autre se fait sans labour supplémentaire, ou presque³² ; c'est là l'un des avantages de la méthode de Green. En outre, comme le premier membre de (9.69) est caractéristique du système étudié (il en contient toute la dynamique interne), alors que le second membre (la source) représente une action extérieure sur ce système, la fonction de Green contient toute l'information sur la dynamique interne de ce système.

La difficulté est ainsi exclusivement reportée sur la détermination de la *bonne* (voir plus loin) fonction de Green du problème physique posé. Évidemment, pour une équation dont les coefficients a_n sont constants, il n'y a pas de difficulté majeure ; au contraire, et comme pour les équations différentielles, la dépendance éventuelle $a_n(x)$ augmente considérablement la difficulté de trouver effectivement $G(x, x')$.

Les écritures ci-dessus supposent toutes les grandeurs sans dimension, les fonctions et les variables. À l'inverse, si x est une longueur, alors on doit avoir $[a_n L^{-n}][G] = [L]^{-1}$ quel que soit n , de sorte que $[G] = [a_n^{-1} L^{n-1}]$.

9.6.3 Exemples

Il s'agit maintenant d'illustrer les idées précédentes dans des cas très simples, où d'ailleurs la solution peut être obtenue en quelques lignes, sans l'usage des fonctions de Green³³. Ce qui suit doit donc être considéré comme un simple exercice d'illustration des idées énoncées, où le risque est nul d'être aveuglé par une difficulté technique qui serait ici d'intérêt très secondaire.

En outre, cette illustration sera l'occasion de retrouver des idées importantes, comme par exemple le lien étroit entre causalité et analyticité. Enfin, ces cas très simples permettent de préciser le contenu physique

³⁰La fonction de Green satisfait donc la même équation que la fonction f inconnue, la source étant remplacée par une perturbation de type percussion centrée en x' . En d'autres termes, si dans (9.69) on choisit $\phi(x) = \delta(x)$, la solution de cette équation avec une source impulsion-unité est $f(x) = G(x, x' = 0)$.

³¹supposant connue la solution générale de l'équation homogène, mais d'ailleurs... (voir plus loin)

³²On trouve une situation comparable en Mécanique quantique, où les équations de Heisenberg permettent de trouver la dynamique des observables. La considération d'un état initial ou d'un autre, laborieuse dans la description de Schrödinger, est quasi-immédiate dans la vision de Heisenberg.

³³On pourrait objecter que l'on fait donner l'artillerie pour tuer une mouche, mais ce serait hors de propos.

de la fonction de Green, dont l'universalité dépasse très largement le cadre simpliste des exemples traités. Par exemple, on verra que quand la variable est le temps ($x \rightarrow t$), la partie imaginaire de la transformée de Fourier de la fonction de Green décrit, pour un système non purement mécanique (dissipatif), l'absorption d'énergie par ce système.

L'oscillateur harmonique isolé

Comme premier exemple, prenons l'équation de l'oscillateur harmonique (bille quasi-ponctuelle de masse m attachée à un ressort parfait de constante de raideur k), supposé *isolé* c'est-à-dire en l'absence de toute interaction avec un milieu produisant de l'amortissement (il s'agit donc d'un système purement mécanique, à peu de degrés de liberté – en fait un seul –, dont le mouvement s'effectue à énergie constante) ; dans les variables physiques $x =$ écart à l'équilibre, $t =$ temps, $\phi =$ force par unité de masse, l'équation avec une force (excitation) quelconque est³⁴ :

$$m\ddot{x} = -kx + F(t) \iff \ddot{x} + \omega_0^2 x = \phi(t), \quad k = m\omega_0^2, \quad \phi(t) = \frac{F(t)}{m}; \quad (9.74)$$

dans la suite, la quantité $\phi(t)$ sera appelée *source*. Ceci étant posé, l'équation satisfaite par la fonction de Green associée est :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') + \omega_0^2 G(t, t') = \delta(t - t'); \quad (9.75)$$

ici, G a la dimension d'un temps. Dans les notations en cours, (9.73) se transcrit comme suit :

$$x(t) = x_h(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t')\phi(t')dt', \quad x_h(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t. \quad (9.76)$$

Compte tenu des remarques préliminaires (sous-section 9.6.1), le terme le plus singulier est celui de plus haute dérivée, ici une dérivée seconde, et c'est elle qui contient le saut infini imposé par la présence de δ au second membre. Il en résulte, selon (9.66), que la primitive de cette dernière (la dérivée première, donc) contient une fonction θ (un saut fini) et que la primitive de la dérivée (soit G) est continue en $t' = t$, conformément à (9.67).

Ce rappel étant fait, pour $t \neq t'$, (9.75) se réduit à :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') + \omega_0^2 G(t, t') = 0 \quad \forall t \neq t'. \quad (9.77)$$

On peut donc écrire³⁵ :

$$G(t, t') = \begin{cases} C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t & \forall t < t' \\ A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t & \forall t > t' \end{cases}; \quad (9.78)$$

les quantités A, B, C et D sont les constantes d'intégration vis-à-vis de l'intégration en t , et sont donc *a priori* des fonctions de t' . La question est maintenant de les déterminer.

Le point à bien comprendre est que les deux expressions apparaissant dans (9.78) sont les expressions d'une seule et même fonction, $G(t, t')$, chacune étant valide dans une région donnée, $t < t'$ ou $t > t'$. Pour trouver les "constantes" A, B, C et D – ou en tout cas en déterminer certaines, il suffit d'exploiter ce que l'on sait de G et de sa dérivée. L'idée est d'utiliser les deux expressions (9.78) et, partant de chaque région, de venir vers leur frontière commune (ici, le point $t = t'$, *l'instant t' étant fixé*) pour y écrire les conditions sur G et sa dérivée. C'est typiquement ce que l'on appelle des conditions³⁶ de *raccordement*. Par exemple, on sait que G

³⁴Dans ces notations, la source est homogène à une accélération. Par ailleurs, dans (9.74), l'origine est prise au point d'équilibre ($x_e = 0$).

³⁵On note que, par définition, $G(t, t')$ a de part et d'autre de $t = t'$ l'allure d'une solution générale de l'équation homogène – c'est pourquoi la détermination de G est tributaire de la connaissance de cette solution générale, et c'est bien dans un tel contexte que G est efficace pour trouver une solution particulière.

³⁶Cette procédure est systématique en Mécanique quantique quand l'énergie potentielle $V(x)$ est continue par morceaux : en chaque point de discontinuité *finie* de V , la fonction propre $\psi(x)$ et sa dérivée sont continues. C'est seulement lorsque V a un saut infini (par exemple $V(x) \propto \delta(x - x_0)$, ou puits carré infini) que ψ' a un saut, ψ restant *toujours* continue puisque l'équation aux valeurs et fonctions propres $H\psi = E\psi$ est du second ordre d'espace (ou impulsion).

est continue, y compris en $t = t'$. On part donc de l'expression $C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t$, vraie à gauche de t' , et on fait tendre t vers t' par valeurs inférieures ; ceci donne la valeur à gauche :

$$G(t = t' - 0, t') = C \cos \omega_0 t' + D \sin \omega_0 t' ; \quad (9.79)$$

De même, la valeur à droite en $t = t'$ est $G(t = t' + 0, t') = A \cos \omega_0 t' + B \sin \omega_0 t'$; la continuité de G donne une première relation³⁷ entre les "constantes" A, B, C et D :

$$C \cos \omega_0 t' + D \sin \omega_0 t' = A \cos \omega_0 t' + B \sin \omega_0 t' ; \quad (9.80)$$

En revanche, on sait que la dérivée $\frac{\partial G}{\partial t}$ a un saut, en $t = t'$, dont on trouve l'amplitude en intégrant en t (9.75) de part et d'autre de t' . L'intégration de la dérivée seconde donne la variation de la dérivée première de part et d'autre du point t' ; par ailleurs, comme G est une fonction bornée continue, le terme en $\omega_0^2 G$ donne zéro (intégration sur un intervalle de mesure nulle) – quant au terme $\delta(t - t')$ du second membre, il donne 1 par définition de δ . Au total on obtient ainsi l'égalité³⁸ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} G(t, t') \right)_{t=t'+0} - \left(\frac{\partial}{\partial t} G(t, t') \right)_{t=t'-0} = 1 . \quad (9.81)$$

En allant chercher à nouveau les deux expressions (9.78), on trouve la deuxième équation de raccordement :

$$-\omega_0 A \sin \omega_0 t' + \omega_0 B \cos \omega_0 t' - [-\omega_0 C \sin \omega_0 t' + \omega_0 D \cos \omega_0 t'] = 1 ; \quad (9.82)$$

Les deux équations (9.80) et (9.82) produisent finalement le système linéaire inhomogène :

$$\begin{cases} (A - C) \cos \omega_0 t' + (B - D) \sin \omega_0 t' = 0 \\ -(A - C) \sin \omega_0 t' + (B - D) \cos \omega_0 t' = \frac{1}{\omega_0} \end{cases} , \quad (9.83)$$

dont la solution est :

$$(A - C) = -\frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t' , \quad (B - D) = \frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t' . \quad (9.84)$$

Selon (9.78), on a donc :

$$G(t, t') = \begin{cases} C(t') \cos \omega_0 t + D(t') \sin \omega_0 t & \forall t < t' \\ \left[C(t') - \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t' \right] \cos \omega_0 t + \left[D(t') + \frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t' \right] \sin \omega_0 t & \forall t > t' \end{cases} ; \quad (9.85)$$

ceci peut s'écrire d'une seule façon :

$$G(t, t') = \left[C(t') - \frac{1}{\omega_0} \theta(t - t') \sin \omega_0 t' \right] \cos \omega_0 t + \left[D(t') + \frac{1}{\omega_0} \theta(t - t') \cos \omega_0 t' \right] \sin \omega_0 t , \quad (9.86)$$

ou encore³⁹ :

$$G(t, t') = C(t') \cos \omega_0 t + D(t') \sin \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \theta(t - t') \sin \omega_0(t - t') . \quad (9.87)$$

On vérifie aisément que cette fonction est bien solution de (9.75), quelles que soient les fonctions $C(t')$ et $D(t')$, et en constitue donc la solution générale. En effet, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [\theta(t - t') \sin \omega_0(t - t')] = \delta'(t - t') \sin \omega_0(t - t') + 2\omega_0 \delta(t - t') \cos \omega_0(t - t') - \omega_0^2 \theta(t - t') \sin \omega_0(t - t') . \quad (9.88)$$

Par ailleurs $\langle \delta', f \rangle = -f'(0)$, $\langle \delta, f \rangle = f(0)$, d'où :

$$\delta'(t - t') \sin \omega_0(t - t') = -\omega_0 \delta(t - t') \cos \omega_0(t - t') = -\omega_0 \delta(t - t') , \quad \delta(t - t') \cos \omega_0(t - t') = \delta(t - t') . \quad (9.89)$$

³⁷ Attention : il faut se souvenir que t' est fixé ; ne pas déduire de cette équation $A = C$ et $B = D$ au motif que les sin et les cos sont des fonctions linéairement indépendantes !

³⁸ Même type de remarque que dans la note 37.

³⁹ On note que, à ce stade, $G(t, t')$ n'est pas une fonction de la seule différence $t - t'$.

Au total, il vient :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [\theta(t-t') \sin \omega_0(t-t')] = \omega_0 \delta(t-t') - \omega_0^2 \theta(t-t') \sin \omega_0(t-t') , \quad (9.90)$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') &= -\omega_0^2 [C(t') \cos \omega_0 t + D(t') \sin \omega_0 t] - \omega_0 \theta(t-t') \sin \omega_0(t-t') + \delta(t-t') \\ &= -\omega_0^2 G(t, t') + \delta(t-t') \quad \forall C, D \quad \text{CQFD} . \end{aligned} \quad (9.91)$$

Dans l'expression (9.87), il reste deux "constantes" indéterminées, $C(t')$ et $D(t')$, et c'est bien normal puisque l'équation (9.75) satisfaite par $G(t, t')$ est une équation aux dérivées partielles du second ordre, et qu'aucune condition supplémentaire n'a encore été imposée à $G(t, t')$. Pour l'instant, la solution générale de l'équation (9.74) a pour expression (9.76) où $G(t, t')$ est donnée en (9.87). Il reste ainsi 4 "constantes" encore indéterminées pour l'instant : les deux (vraies) constantes a et b dans (9.76) et les deux fonctions $C(t)$ et $D(t)$. Les conditions initiales spécifiant, par exemple, la position et la vitesse à un instant de référence donneront deux relations supplémentaires, mais il faut visiblement invoquer d'autres contraintes pour tout trouver.

Comme toujours, s'agissant d'un problème physique bien posé, ce sont des considérations physiques qui vont permettre de lever toute ambiguïté ou indétermination. Ici, c'est le principe de causalité que l'on invoque : il est certain que, en vertu de la causalité et selon (9.76), on doit avoir $G(t, t') = 0$ si $t < t'$, car la réponse x à l'instant t ne saurait dépendre de la valeur de la source à un instant *postérieur*. Revenant à l'expression (9.87) de la solution générale, l'exigence du principe de causalité conduit immédiatement à $C = D \equiv 0$.

Physiquement, la *bonne* fonction de Green est donc, quels que soient t et t' , donnée par (9.87) avec $C = D = 0$, soit :

$$G_{\text{av}}(t, t') = \frac{1}{\omega_0} \theta(t-t') \sin \omega_0(t-t') ; \quad (9.92)$$

l'indice av (pour fonction de Green *avancée*, on dit aussi fonction de Green *causale*)⁴⁰ rappelle qu'il s'agit de la fonction nulle pour $t < t'$. Le facteur $\theta(t-t')$, qui apparaît *spontanément* dans le calcul est là pour pour ça et fait ce qu'il faut.

Il est important de souligner ce fait essentiel : c'est l'application de conditions particulières, dictées par des considérations physiques, qui permet de lever toute ambiguïté pour la réponse attendue. Ici, c'est le Principe de causalité qui achève la détermination de la fonction de Green, imposant la condition aux limites⁴¹ $G(t, t') = 0$ si $t < t'$, *i.e.* $t - t' < 0$. En outre, on note que G est maintenant une fonction de la seule différence des temps $t - t'$: une fois les considérations physiques prises en compte, le mouvement physique de la bille ne dépend que de l'intervalle *écoulé* à partir d'un certain instant⁴².

Une chose doit aussi être remarquée : la fonction de Green (9.92) n'a pas ici de transformée de Fourier au sens usuel. Par exemple, pour la fonction avancée, l'écriture ($\mathcal{G}_{\text{av}} = \mathcal{F}[G_{\text{av}}]$) :

$$\mathcal{G}_{\text{av}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{1}{\omega_0} \theta(t-t') \sin \omega_0(t-t') e^{i\omega(t-t')} = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{+\infty} dt'' \sin \omega_0 t'' e^{i\omega t''} \quad (???) \quad (9.94)$$

⁴⁰On définit de même la fonction de Green *retardée* (ou anticausale), $G_{\text{ret}}(t, t')$ nulle, elle, pour $t > t'$, en prenant $C = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t'$ et $D = -\frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t'$, ce qui donne :

$$G_{\text{ret}}(t, t') = -\frac{1}{\omega_0} \theta(t'-t) \sin \omega_0(t-t') \equiv G_{\text{av}}(t', t) . \quad (9.93)$$

En quelque sorte, $G_{\text{av}}(t, t')$ propage le système du présent vers le futur, $G_{\text{ret}}(t, t')$ propage du présent vers le passé. La dernière égalité traduit la symétrie par renversement du temps pour un système purement mécanique (non-amorti, c'est-à-dire non dissipatif).

⁴¹De même, en Mécanique quantique, ce sont les conditions imposées aux fonctions propres – conditions *mathématiques* imposées en vertu du sens *physique* attribué à ces fonctions – qui produisent la quantification spontanée de l'énergie des états liés. Le même type de quantification se produit pour une corde vibrante dont les extrémités sont fixées.

⁴²On peut voir là la signature de l'uniformité du temps : que l'on démarre une *manip* à midi ou au goûter ne change pas le résultat observé au bout d'un quart d'heure.

n'a pas de sens, et doit donc être régularisée. Une façon de faire converger l'intégrand à l'infini est d'introduire "à la main" un facteur exponentiel convergent $e^{-\varepsilon t}$ ($\varepsilon > 0$!) et de prendre la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ après intégration. On redéfinit ainsi :

$$\mathcal{G}_{av}(\omega) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\omega_0} \int_0^{+\infty} dt \sin \omega_0 t e^{i\omega t} e^{-\varepsilon t} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\omega_0} \left(\frac{1}{\omega + \omega_0 + i\varepsilon} - \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\varepsilon} \right). \quad (9.95)$$

Chacune des fractions rationnelles donne la partie principale de Cauchy, \mathcal{P} , et une fonction de Dirac ; au total, ainsi régularisée, la transformée de Fourier de la fonction de Green avancée est :

$$\mathcal{G}_{av}(\omega) = \frac{1}{2\omega_0} \left(\mathcal{P} \frac{1}{\omega + \omega_0} - i\pi\delta(\omega + \omega_0) - \mathcal{P} \frac{1}{\omega - \omega_0} + i\pi\delta(\omega - \omega_0) \right). \quad (9.96)$$

La justification physique d'une telle régularisation – *a priori* assez artificielle – apparaîtra clairement dans l'étude de l'oscillateur amorti (voir ci-dessous) – dont la fonction de Green, au contraire, possède tout naturellement une transformée de Fourier.

Quoi qu'il en soit, admettant pour l'instant cette régularisation pour les transformées de Fourier et par le théorème de convolution appliqué à (9.71), la transformée $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)](\omega)$ est donnée par⁴³ :

$$X(\omega) = \frac{1}{2}(a - ib)\delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}(a + ib)\delta(\omega - \omega_0) + \mathcal{G}_{av}(\omega)\Phi(\omega), \quad (9.97)$$

où $\Phi = \mathcal{F}[\phi]$, et où a et b sont les constantes apparaissant en (9.76).

En définitive, la solution la plus générale et physiquement acceptable du mouvement de l'oscillateur mécanique en présence de la source $\phi(t)$ est⁴⁴ :

$$x(t) = x_h(t) + \frac{1}{\omega_0} \int_{-\infty}^t \sin \omega_0(t - t')\phi(t') dt', \quad (9.98)$$

où la borne supérieure de l'intégrale prend en compte le fait que $G_{av}(t, t')$ est nulle si $t' > t$. On peut maintenant fixer les constantes a et b contenues dans $x_h(t)$. Par exemple, si on se dit qu'à un certain instant t_0 , position et vitesse valent respectivement x_0 et v_0 , on peut écrire :

$$x_0 = a \cos \omega_0 t_0 + b \sin \omega_0 t_0 + \frac{1}{\omega_0} \int_{-\infty}^{t_0} \sin \omega_0(t_0 - t')\phi(t') dt', \quad (9.99)$$

et :

$$v_0 = -a\omega_0 \sin \omega_0 t_0 + b\omega_0 \cos \omega_0 t_0 + \int_{-\infty}^{t_0} \cos \omega_0(t_0 - t')\phi(t') dt', \quad (9.100)$$

ce qui fournit deux équations⁴⁵ pour les deux constantes a et b .

Ainsi, la fonction de Green étant trouvée, la solution relative à une source donnée s'obtient par une simple intégration ; un changement de source n'exige que le calcul d'une seule nouvelle intégrale : le travail est fait une fois pour toutes par la détermination explicite de la bonne fonction de Green associée à l'équation considérée.

Pour illustrer ceci, supposons que l'oscillateur, au repos jusqu'à un certain instant conventionnellement pris comme origine $t = 0$, est soumis à partir de $t = 0$ à une perturbation $\phi(t)$ non nulle (*i.e.* $\phi(t) = Y(t)\tilde{\phi}(t)$). Dans ces conditions, les deux constantes a et b sont nulles, comme on le voit en écrivant les deux équations (9.99) et (9.99) avec $t_0 = 0$: comme $\phi(t) = 0$ pour $t < 0$, les deux intégrales sont encore nulles à $t = 0$, et le système pour a et b n'a que la solution triviale $a = b = 0$, d'où il résulte $x_h(t) \equiv 0$. Dans ces conditions précises, l'expression de la solution se réduit à :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{av}(t, t')\phi(t') dt' = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0(t - t')\phi(t') dt' \quad (t > 0), \quad (9.101)$$

⁴³Se souvenir que $\mathcal{F}[e^{-i\omega_0 t}] = \delta(\omega - \omega_0)$.

⁴⁴La source étant homogène à une accélération, le second membre de (9.98) est bien une longueur.

⁴⁵Le système (9.99) et (9.100) a un déterminant égal à 1, et a donc toujours une solution et une seule.

où la borne inférieure résulte du fait que $\phi(t)$ est maintenant supposée nulle à $t < 0$.

Par exemple, si on applique de l'extérieur une force constante⁴⁶ $\frac{F_0}{m}$ à partir de $t = 0$, alors la source est $\phi(t) = \frac{F_0}{m}Y(t)$; l'oscillateur étant toujours initialement au repos (avant l'arrivée de la perturbation), la solution est :

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0(t-t') dt' = \frac{F_0}{m\omega_0^2}(1 - \cos \omega_0 t) . \quad (9.102)$$

L'oscillation est toujours harmonique, mais s'effectue maintenant de part et d'autre d'une nouvelle position d'équilibre d'abscisse $x_{\text{eq}} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \equiv \frac{F_0}{k}$, correspondant au point d'équilibre entre la force de rappel vers $x = 0$ et la force constante F_0 appliquée en plus de l'extérieur ($m\omega_0^2 x_{\text{eq}} \equiv kx_{\text{eq}}$) ; (9.102) se réécrit comme :

$$x(t) = x_{\text{eq}}(1 - \cos \omega_0 t) . \quad (9.103)$$

De fait, l'application soudaine d'une force constante ne fait que déplacer le point d'équilibre autour duquel s'effectue l'oscillation, dont la fréquence est inchangée⁴⁷. Après application de la force, l'énergie (nulle avant) est constante et égale à $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2(x - x_{\text{eq}})^2 = \frac{F_0^2}{2m\omega_0^2} \equiv \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_{\text{eq}}^2$: c'est l'énergie potentielle de la bille en $x = 0$ quand le point d'équilibre est x_{eq} .

L'oscillateur harmonique amorti

Il vaut la peine de regarder le cas de l'oscillateur en présence de frottement, afin d'exhiber les différences qualitatives entre un système *réel* (en pratique, il y a toujours de l'amortissement) et l'oscillateur isolé, qui est toujours un peu une vue de l'esprit : physiquement on doit considérer le cas non-amorti comme l'idéalisation d'un oscillateur réel observé sur une échelle de temps courte par rapport à l'amortissement (soit $t \ll \gamma^{-1}$ dans la notation qui va être introduite). Pour s'en tenir à la description la plus simple, on choisit un frottement proportionnel à la vitesse (frottement fluide). Dans ces conditions, l'équation fondamentale en présence d'une source $F(t)$ est :

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - kx + F(t) \iff \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \phi(t) \quad (\gamma > 0, F = m\phi) . \quad (9.104)$$

γ^{-1} a la dimension d'un temps, c'est une échelle de temps supplémentaire par rapport à ω_0^{-1} qui (à un facteur 2π près) donne la période d'oscillation. Il existe ainsi désormais un paramètre sans dimension⁴⁸, $Q \equiv \frac{\omega_0}{\gamma}$, dont les valeurs grandes ou petites devant l'unité donneront deux types de comportements qualitativement différents (respectivement : régime sous-amorti et régime sur-amorti), le cas limite $Q = +\infty$ correspondant à l'oscillateur idéal sans amortissement (isolé).

Ceci étant, l'équation satisfaite par la fonction de Green associée à (9.104) est alors :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') + \gamma \frac{\partial}{\partial t} G(t, t') + \omega_0^2 G(t, t') = \delta(t - t') . \quad (9.105)$$

La procédure suivie maintenant est parallèle à celle entreprise précédemment. Pour $t \neq t'$, (9.105) est :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') + \gamma \frac{\partial}{\partial t} G(t, t') + \omega_0^2 G(t, t') = 0 \quad \forall t \neq t' . \quad (9.106)$$

Afin de simplifier les écritures, on écrit la solution de cette équation en combinaison linéaire d'exponentielles complexes (et non plus en sin et cos) :

$$G(t, t') = \begin{cases} C_+ e^{i\omega_+ t} + C_- e^{i\omega_- t} & \forall t < t' \\ A_+ e^{i\omega_+ t} + A_- e^{i\omega_- t} & \forall t > t' \end{cases} , \quad (9.107)$$

⁴⁶Exemple : une particule chargée liée harmoniquement, que l'on soumet à $t \geq 0$ à un champ électrique constant.

⁴⁷Le même phénomène se produit en Mécanique quantique.

⁴⁸ Q mesure ce qu'il est convenu d'appeler *facteur de qualité* de l'oscillateur : plus Q est grand, plus la résonance est fine.

où ω_{\pm} désigne les racines de l'équation $-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2 = 0$, soit $\omega_{\pm} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} + i\frac{\gamma}{2} \equiv \pm\tilde{\omega}_0 + i\frac{\gamma}{2}$: maintenant, en conséquence de l'amortissement, les fréquences caractéristiques ont une partie imaginaire finie (mais toujours positive, quels que soient⁴⁹ ω_0 et γ).

Les équations de raccordement s'écrivent ici :

$$C_+e^{i\omega_+t'} + C_-e^{i\omega_-t'} = A_+e^{i\omega_+t'} + A_-e^{i\omega_-t'} , \quad (9.108)$$

$$i\omega_+A_+e^{i\omega_+t'} + i\omega_-A_-e^{i\omega_-t'} - [i\omega_+C_+e^{i\omega_+t'} + i\omega_-C_-e^{i\omega_-t'}] = 1 . \quad (9.109)$$

Afin d'aller plus vite, cherchons d'emblée la fonction de Green avancée, ce qui revient à prendre $C_{\pm} = 0$. On trouve alors, après calcul⁵⁰ :

$$G_{av}(t, t') = \frac{1}{\tilde{\omega}_0} \theta(t - t') e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \sin \tilde{\omega}_0(t - t') . \quad (9.111)$$

Ici apparaît une première différence qualitative avec le cas non amorti – la transformée de Fourier de G_{av} existe au sens usuel :

$$\mathcal{G}_{av}(\omega) = \frac{1}{\tilde{\omega}_0} \int_0^{+\infty} dt e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin \tilde{\omega}_0 t e^{i\omega t} = \frac{1}{2\tilde{\omega}_0} \left(\frac{1}{\omega + \tilde{\omega}_0 + i\frac{\gamma}{2}} - \frac{1}{\omega - \tilde{\omega}_0 + i\frac{\gamma}{2}} \right) = \frac{1}{\tilde{\omega}_0^2 - (\omega + i\frac{\gamma}{2})^2} ; \quad (9.112)$$

Cette expression montre que le paramètre de frottement γ (donnant l'amortissement) se substitue tout naturellement au paramètre "fictif" ε introduit en (9.95) pour effectuer la régularisation. Comme tous les systèmes physiques sont amortis (même "infinitement peu"), la procédure de régularisation (9.95), somme toute *a priori* assez artificielle, s'en trouve justifiée – au moins dans l'hypothèse du frottement fluide. Notons que, en tant que transformée de Fourier d'une fonction à valeurs réelles, \mathcal{G}_{av} possède la symétrie :

$$\mathcal{G}_{av}(-\omega) = [\mathcal{G}_{av}(\omega)]^* . \quad (9.113)$$

Ceci signifie que la partie réelle de $\mathcal{G}_{av}(\omega)$ est paire, que sa partie imaginaire est impaire⁵¹ :

$$\mathcal{G}_{av}(\omega) = \mathcal{G}_{av1}(\omega) + i\mathcal{G}_{av2}(\omega) : \quad \mathcal{G}_{av1}(-\omega) = \mathcal{G}_{av1}(\omega) , \quad \mathcal{G}_{av2}(-\omega) = -\mathcal{G}_{av2}(\omega) . \quad (9.114)$$

Par ailleurs, l'expression intégrale de $G_{av}(t, t')$:

$$G_{av}(t, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t-t')} \mathcal{G}_{av}(\omega) d\omega \quad (9.115)$$

reflète bien une fois encore le lien entre analyticité et causalité. En effet, pour $t > t'$, on referme le contour par le bas, et on ramasse les deux résidents de $\mathcal{G}_{av}(z)$ en $z_{\pm} = -i\frac{\gamma}{2} \pm \tilde{\omega}_0$. Au contraire, pour $t < t'$, on ferme par en haut, mais comme il n'y a aucune singularité, l'intégrale est nulle comme il se doit. Avec les définitions en cours⁵², le Principe de causalité se traduit par le fait que $\mathcal{G}_{av}(\omega)$ est analytique dans le demi-plan supérieur. Quand l'amortissement est nul, les pôles se trouvent sur la droite réelle, et il faut bien régulariser, d'une façon ou d'une autre, puisque le chemin d'intégration bute sur les singularités, d'où la partie principale de Cauchy et la fonction de Dirac.

⁴⁹Si $\gamma < 2\omega_0$, les ω_{\pm} ont une partie réelle finie (régime sous-amorti, frottement faible). Dans le cas contraire, $\gamma > 2\omega_0$, on a $\omega_{\pm} = i\left(\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\right)$: les ω_{\pm} sont alors imaginaires pures (régime sur-amorti, frottement fort, pas d'oscillation pendant relaxation), leurs parties imaginaires étant toutes deux positives.

⁵⁰De la même façon, la fonction retardée est :

$$G_{ret}(t, t') = -\frac{1}{\tilde{\omega}_0} \theta(t' - t) e^{-\gamma(t-t')} \sin \tilde{\omega}_0(t - t') \neq G_{av}(t', t) . \quad (9.110)$$

La symétrie de renversement du temps est brisée par l'amortissement, comparer avec la note 40.

⁵¹Attention : l'usage est fréquent de noter \mathcal{G}' et \mathcal{G}'' respectivement les parties réelle et imaginaire de \mathcal{G} , mais il ne s'agit pas de ses dérivées !

⁵²Si on inverse la convention de définition de la transformation de Fourier, les deux demi-plans s'échangent.

Il a été affirmé plus haut que la fonction de Green contient toute la dynamique interne du système. Ceci se voit bien sur la transformée de Fourier $\mathcal{G}_{\text{av}}(\omega)$. Selon (9.112), et compte tenu de l'expression de $\tilde{\omega}_0$, on a :

$$\mathcal{G}_{\text{av}}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2} + i \frac{\gamma\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2} . \quad (9.116)$$

Notamment, le module de $\mathcal{G}_{\text{av}}(\omega)$ présente un pic très marqué lorsque $\gamma \ll \omega_0$ ($Q \gg 1$), ce qui traduit le phénomène banal de *résonance* lorsqu'on excite un oscillateur (sous-amorti) à une pulsation ω voisine de sa pulsation propre ω_0 .

L'importance de la fonction de Green tient aussi au fait qu'elle décrit l'absorption d'énergie par l'oscillateur. En effet, $m\phi(t) = F(t)$ est la force *extérieure* ; par conséquent, le travail de cette force est par définition l'énergie *reçue* par l'oscillateur : $dW = Fdx = F\dot{x}dt$. L'énergie totale fournie à (absorbée par) l'oscillateur est donc⁵³ :

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{+\infty} F\dot{x}dt \equiv \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F\dot{x}e^{i\omega t} dt \right]_{\omega=0} = \mathcal{F}[F\dot{x}](\omega=0) . \quad (9.117)$$

On a $\mathcal{F}[\dot{x}] = -i\omega\mathcal{F}[x]$; en supposant l'oscillateur au repos avant l'arrivée de la perturbation ϕ , la solution homogène est identiquement nulle et il reste seulement $\mathcal{F}[x] = \mathcal{G}(\omega)\Phi(\omega)$ (voir (9.98)). Par le théorème de convolution, il vient alors :

$$\mathcal{F}[F\dot{x}](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} m\Phi(\omega - \omega')[-i\omega'\mathcal{G}_{\text{av}}(\omega')\Phi(\omega')] d\omega' , \quad (9.118)$$

de sorte que l'énergie absorbée est donnée par :

$$\Delta E = \frac{m}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(-\omega')\omega'\mathcal{G}_{\text{av}}(\omega')\Phi(\omega') d\omega' . \quad (9.119)$$

En outre, comme Φ est la transformée de Fourier d'une fonction réelle, $\Phi(-\omega) = \Phi(\omega)^*$; d'où :

$$\Delta E = \frac{m}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega'\mathcal{G}_{\text{av}}(\omega')|\Phi(\omega')|^2 d\omega' , \quad (9.120)$$

et, en vertu des symétries exprimées par (9.114), seule la partie imaginaire contribue à l'intégrale :

$$\Delta E = \frac{m}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega' |\Phi(\omega')|^2 \Im\mathcal{G}_{\text{av}}(\omega') d\omega' = \frac{m}{\pi} \int_0^{+\infty} \omega' |\Phi(\omega')|^2 \Im\mathcal{G}_{\text{av}}(\omega') d\omega' . \quad (9.121)$$

Ainsi, la partie imaginaire de la fonction de Green avancée donne-t-elle directement l'énergie absorbée par l'oscillateur. Dans le cas d'une source quasi-monochromatique à ω_e , de durée $T \gg \omega_e^{-1}$, $\Phi(\omega)$ est un précurseur $\delta_{1/T}(\omega \pm \omega_e)$ de $\delta(\omega \pm \omega_e)$, qui va filtrer l'intégrand ; au total, on trouve que l'énergie absorbée est proportionnelle à $T\Im\mathcal{G}(\omega_e)$: l'énergie moyenne absorbée par unité de temps, $\frac{\Delta E}{T}$, varie comme $\Im\mathcal{G}(\omega_e)$, elle est d'autant plus grande que la pulsation de la source est voisine de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur. En outre, dans la limite $\gamma = 0+$, $\Delta E = 0$: si l'oscillateur est non-amorti (isolé), son énergie est constante... comme il se doit.

Tous ces résultats s'appliquent à un oscillateur harmonique amorti, quelle que soit sa nature physique précise. Par exemple, pour un circuit RLC aux bornes duquel on applique la tension $v(t)$, l'équation pour l'intensité $i(t)$ est :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \dot{v}(t) . \quad (9.122)$$

Par rapport à l'oscillateur matériel de référence, le dictionnaire des paramètres est le suivant :

$$m \leftrightarrow L , \quad R \leftrightarrow \gamma , \quad \frac{1}{C} \leftrightarrow \omega_0^2 . \quad (9.123)$$

L'inductance joue bien un rôle inertiel, en s'opposant aux variations brusques de courant (elle arrondit les sauts), la résistance est bien le terme dissipatif, quant à C^{-1} , c'est bien ce qui rappelle l'intensité vers la valeur zéro. La condition de résonance du circuit est $LC\omega^2 = 1$, en conformité avec $\omega = \omega_0$ pour l'oscillateur matériel.

⁵³Ici, pas de terme de chaleur $\dot{d}Q$!