Chapitre 3

Représentation des fonctions analytiques par des séries. Théorème des résidus

Après un rappel et une généralisation
de résultats classiques d'analyse,
un théorème capital sera démontré :
le théorème des résidus

La notion de développement de Taylor est bien connue en analyse réelle. Dans un premier temps, on va voir qu'elle s'étend aux fonctions holomorphes dans un domaine. Par la suite, elle sera généralisée pour montrer dans quelles conditions une fonction $f(z)$ peut être représentée par un développement du genre :

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad . \tag{3.1}$$

La particularité d'un tel développement est de contenir toutes les puissances entières du monôme $(z-a)$, positives et *négatives*. Ce résultat est d'une importance capitale, et permet notamment, quand a est une singularité de f, une classification des singularités d'une fonction ; les singularités jouent un rôle de première importance dans toute la suite.

3.1 Séries de Taylor

La série de Taylor d'une fonction s'introduit naturellement comme suit. Soit la somme géométrique[1] $(z \neq 1)$:

$$S_n(X) \;=\; \sum_{p=0}^{n} X^p \;=\; \frac{1-X^{n+1}}{1-X} \;=\; \frac{1}{1-X} - \frac{X^{n+1}}{1-X} \quad , \tag{3.2}$$

ce qui peut se récrire comme :

$$\frac{1}{1-X} \;=\; 1 + X + X^2 + \ldots + X^n + \frac{1}{1-X}\,X^{n+1} \quad . \tag{3.3}$$

[1]Pour $z = 1$, on a trivialement $S_N = N$. Par ailleurs, le développement classique (3.2), démontré à un niveau élémentaire pour $z \in \mathbb{R}$, est de toute évidence également vrai pour $z \in \mathbb{C}$.

Considérons maintenant la fraction rationnelle $\frac{1}{\xi-z}$, qui joue un rôle central dans les diverses relations et théorèmes établis au chapitre précédent. Introduisant de plus un complexe quelconque a, on a :

$$\frac{1}{\xi - z} \;=\; \frac{1}{(\xi - a) + (a - z)} \;=\; \frac{1}{\xi - a}\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} \;\; , \tag{3.4}$$

En faisant la substitution $X = \frac{z-a}{\xi-a}$ dans (3.3), il vient :

$$\frac{1}{\xi - z} \;=\; \frac{1}{\xi - a}\left[1 + \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right) + \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n + \frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^{n+1}\right] \;\; , \tag{3.5}$$

soit :

$$\frac{1}{\xi - z} \;=\; \frac{1}{\xi - a} + \frac{z-a}{(\xi-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\xi-a)^3} + \ldots + \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} + \frac{1}{\xi - z}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^{n+1} \;\; . \tag{3.6}$$

Soit maintenant une fonction $f(z)$ holomorphe dans un domaine $\mathcal{D}$. Multiplions membre à membre (3.6) par $\frac{f(\xi)}{2\mathrm{i}\pi}$ et en intégrons sur tout contour C contenu dans $\mathcal{D}$ (ce peut être l'intérieur de la frontière de $\mathcal{D}$), z et a étant tous deux dans $\mathcal{D}$. D'après la formule de Cauchy, le premier membre est égal à $f(z)$; d'après la même formule et sa généralisation :

$$f^{(n)}(a) \;=\; \frac{n!}{2\mathrm{i}\pi}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi \;\; , \tag{3.7}$$

(3.6) devient :

$$f(z) \;=\; f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(z-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(z-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(z-a)^n + R_n(z) \;\; , \tag{3.8}$$

où la quantité R_n, appelée *reste*, a pour expression :

$$R_n(z) \;=\; \frac{(z-a)^{n+1}}{2\mathrm{i}\pi}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi \;\; . \tag{3.9}$$

Visiblement, le développement (3.8) généralise au cas d'une fonction holomorphe la notion de développement de Taylor introduit en Analyse élémentaire à propos d'une fonction réelle d'une variable réelle.

Maintenant, une question naturelle vient à l'esprit : sous quelles conditions peut-on "pousser" un tel développement à l'infini ? Plus précisément, que faut-il pour que, dans la limite $n \to +\infty$, le reste R_n tende uniformément vers zéro ? Quand ces conditions sont réunies, alors la fonction f peut être représentée par une *série* de puissances positives du simple monôme $z - a$:

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(z-a)^n \;\; . \tag{3.10}$$

La réponse à cette question est fournie par le théorème suivant[2] :

La fonction $f(z)$ peut être représentée par sa série de Taylor (3.10) dans tout disque ouvert de centre a dans lequel elle est holomorphe. Dans tout domaine fermé inclus dans ce disque, la série (3.10) converge uniformément

Soit γ_R le cercle de centre a et de rayon R défini par $|\xi - a| = R$, tout entier contenu dans le domaine d'analycité[3] de f et prenons z dans ce disque : $|z-a| < R \iff |z-a| = kR$ avec $k < 1$ (voir fig. 3.1). Par l'inégalité triangulaire :

$$|\xi - a| \;\equiv\; |(\xi - z) + (z - a)| \leq |\xi - z| + |z - a| \;\; , \tag{3.11}$$

il vient :

$$|\xi - z| \;\geq\; |\xi - a| - |z - a| \geq R - kR = (1-k)R \;>\; 0 \;\; . \tag{3.12}$$

Par (3.9), et désignant par M le maximum du module de f dans le disque[4] $|z-a| \leq R$, le reste R_n se majore

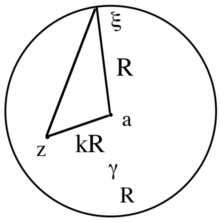

Figure 3.1: Le disque γ_R de rayon R est inclus dans le domaine d'analycité de $f(z)$; visiblement $\forall\, z$, $|z-a| < R$, $|\xi - z| \geq (1-k)R$.

comme suit :

$$|R_n(z)| \;=\; \left|\frac{(z-a)^{n+1}}{2\mathrm{i}\pi}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi\right| \leq \frac{(kR)^{n+1}}{2\pi}\frac{M\,2\pi R}{(1-k)R\,R^{n+1}} \;=\; \frac{Mk^{n+1}}{1-k} \quad . \tag{3.13}$$

k étant plus petit que 1, on a bien $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$. z étant strictement à l'intérieur du disque, la série de Taylor existe bien dans tout ouvert inclus dans le disque ; de plus, comme la borne du reste est *indépendante* de z, la convergence est uniforme dans tout disque fermé de rayon kR, ce qui achève la démonstration du théorème. Une fonction admettant un tel développement est dite *analytique.*

Il y a donc bien équivalence entre les propriétés d'holomorphie (satisfaire les conditions de Cauchy) et d'analycité (admettre un développement en série entière convergeant uniformément). À ce stade, on peut mesurer l'extraordinaire rigidité d'une fonction holomorphe $f(z)$. Au départ, il s'agit "seulement" de s'assurer que $f(z)$ est dérivable (conditions de Cauchy). Comme on l'a vu antérieurement, le fait que $f'(z)$ existe assure que *toutes* les dérivées existent également. Encore plus fort : f admet un développement en série entière dans tout disque inclus dans le domaine où elle est holomorphe.

Rappelons les développements de Taylor à l'infini de quelques fonctions élémentaires, qui apparaissent en fait comme la simple extension d'écriture (z au lieu de x !) des développements introduits en Analyse réelle. Pour la fonction exponentielle, on a :

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\mathrm{e}^z \;=\; \mathrm{e}^z \tag{3.14}$$

d'où il résulte que $f^{(n)}(a=0) = 1$ si $f(z) = \mathrm{e}^z$. La série de Taylor de l'exponentielle centrée en $a = 0$ est donc :

$$\mathrm{e}^z \;=\; 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!} \quad . \tag{3.15}$$

À partir de (3.15), en formant les bonnes combinaisons linéaires de $\mathrm{e}^{\pm z}$, on trouve imédiatement :

$$\sinh z \;=\; z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \;, \qquad \cosh z \;=\; 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{3.16}$$

Tous ces développements convergent pour z quelconque, tout comme ceux des lignes circulaires, obtenus en utilisant[5] $\cosh \mathrm{i}z = \cos z$ et $\sinh \mathrm{i}z = \mathrm{i}\sin z$:

$$\sin z \;=\; z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \;, \qquad \cos z \;=\; 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{3.17}$$

Une fonction holomorphe sur le plan entier $\mathbb{C}$ est dite *entière.* e^z est une fonction entière.

Soit maintenant la fonction $\ln(1+z)$; on a :

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\ln(1+z) \;=\; \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+z)^n} \;, \qquad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\ln(1+z)|_{z=0} \;=\; (-1)^{n+1}(n-1)! \;. \tag{3.18}$$

[2] Encore un théorème dû à Cauchy !
[3] Selon Larousse, on peut dire *analycité* ou *analyticité*.
[4] Comme f est holomorphe dans le disque γ_R, elle y est bornée.
[5] Se souvenir que $\mathrm{i}^{2n} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}})^{2n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi} = (-1)^n$ et donc $\mathrm{i}^{2n+1} = (-1)^n\mathrm{i}$.

La série de Taylor de $\ln(1+z)$ centrée en $z=0$ est donc :

$$\ln(1+z) \;=\; z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \tag{3.19}$$

Cette série converge seulement[6] pour $|z|<1$; il n'est pas inutile de rappeler ce fait en bout de ligne, et d'écrire :

$$\ln(1+z) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \quad , \qquad |z|<1 \ . \tag{3.20}$$

Ce développement peut être retrouvé de tête en intégrant terme à terme $\frac{1}{1+z}$ (il y a convergence uniforme !).

De même le développement du binôme à une puissance quelconque[7, 8] :

$$(1+z)^\alpha \;=\; 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \ldots \;=\; 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n \tag{3.21}$$

ne converge que[9] pour $|z|<1$. En outre, les deux dernières fonctions sont multiformes : comme on le voit immédiatement, les développements écrits correspondent à chaque fois à la branche qui vaut 0 (resp. 1) en $z=0$.

Notons que la somme $S(z)$ d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ de fonctions analytiques dans un domaine simplement connexe $\mathcal{D}$, uniformément convergente dans $\mathcal{D}$, est une fonction analytique (Weierstrass). En effet, en raison de la convergence uniforme, d'une part la somme est une fonction continue, d'autre part, on peut intégrer terme à terme sur un contour fermé C inclus dans $\mathcal{D}$:

$$\int_C S(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z \ . \tag{3.22}$$

Chaque intégrale au second membre est nulle (puisque chaque f_n est analytique dans $\mathcal{D}$). De $\int_C S(z)\,\mathrm{d}z = 0$ et du théorème de Morera, on déduit que $S(z)$ est une fonction analytique. Par ailleurs, toute série de fonctions analytiques dans $\mathcal{D}$ et continues sur $\bar{\mathcal{D}}$, uniformément convergente sur $\bar{\mathcal{D}}$, peut être dérivée terme à terme un nombre arbitraire de fois dans $\mathcal{D}$ (mais pas dans $\bar{\mathcal{D}}$).

Remarques

1. Pour démontrer la convergence dans $\bar{\mathcal{D}}$, il suffit, grâce au principe du maximum[10], de la prouver sur la frontière C de $\mathcal{D}$. En effet :

$$\max_{\{\bar{\mathcal{D}}\}} |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots| \;=\; \max_{\{C\}} |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots| \tag{3.23}$$

2. Pour illustrer le fait que l'on peut dériver dans $\mathcal{D}$ mais pas (forcément) dans $\bar{\mathcal{D}}$, examinons la série $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$. Elle converge sur le disque *fermé*, puisque qu'elle est bornée par la série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (qui vaut $\frac{\pi^2}{6}$). En revanche, la série obtenue par dérivation terme à terme, convergente pour $|z|<1$ et y représentant la dérivée de S, $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$, diverge sur le disque de rayon 1.

[6] Ceci est bien évidemment lié au fait que le point $z=-1$, qui annule l'argument du ln, est un point singulier et qu'il appartient au disque de rayon unité.

[7] Ce développement est vrai quel que soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Si α est entier ($\alpha = n$), le développement en série s'arrête à l'ordre fini n et on retrouve le développement $(1+z)^n$ du binôme.

[8] (3.21) peut aussi s'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n$ en convenant que le produit de zéro facteur(s ?) est égal à 1.

[9] Même remarque que dans la note 6 à propos du logarithme.

[10] Le principe (ou théorème) du maximum stipule qu'une fonction (non constante) holomorphe dans un domaine $\mathcal{D}$ ne peut avoir de maximum local dans ce domaine. Autrement dit, pour tout z_0 donné, on peut trouver dans le voinage de z_0 un point z_1 où $|f(z_0| < |f(z_1|$. En effet, par les conditions de Cauchy, les parties réelle et imaginaire de $f(z)$ satisfont $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$, où Δ désigne le Laplacien à deux dimensions (pour cette raison, u et v sont dites *harmoniques*). Il en résulte que si l'une des dérivées secondes de u est positive, l'autre est négative, et de même pour v. De telles fonctions ne peuvent donc présenter que des points-col (en selle de cheval, en *chip*). Il en résulte que le maximum du module d'une fonction holomorphe dans $\mathcal{D}$ survient en un (des) point(s) de la frontière de ce domaine.

3.2 Séries de Laurent

Le développement de Taylor d'une fonction permet de représenter cette dernière dans un domaine circulaire plongé dans le domaine d'analycité. La propriété essentielle pour le disque est d'être *simplement* connexe. Il s'avère aussi très utile de pouvoir représenter une fonction dans un domaine multiplement connexe, comme une couronne circulaire, et c'est ainsi que s'introduisent naturellement les développements dits de Laurent.

Soit donc K la couronne circulaire de centre a comprise entre les deux cercles de rayons r et R. $\forall z \in K$, on a :

$$r \,<\, |z-a| \,<\, R \qquad \forall\, z \in\, K \tag{3.24}$$

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans la couronne K. Appliquons la formule de Cauchy en prenant comme

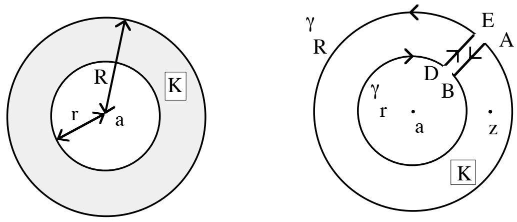

Figure 3.2: Couronne K et contour d'intégration pour l'introduction du développement de Laurent. Les deux petits segments AB et CD sont en réalité infiniment proches l'un de l'autre.

contour C celui formé par les deux cercles (parcourus en sens contraires), reliés par deux petits segments AB et DE infiniment proches l'un de l'autre et parcourus aussi en sens opposés (voir fig. 3.2). En désignant par γ_R et γ_r les deux cercles[11], la formule de Cauchy donne :

$$f(z) \,=\, \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi \,=\, \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\left[\int_{\gamma_R} + \int_{-\gamma_r} + \int_{\mathrm{AB}} + \int_{\mathrm{DE}}\right]\frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi \qquad (z \in K)\ . \tag{3.25}$$

Sur les deux segments infiniment proches AB et DE, f reprend les mêmes valeurs ; comme ils sont parcourus en sens opposés, leurs deux contributions se compensent mutuellement et il reste :

$$f(z) \,=\, \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \,\equiv\, f_1(z) + f_2(z)\ . \tag{3.26}$$

Pour la première intégrale $f_1(z)$, on peut refaire exactement la même gymnastique qu'en (3.6) pour la série de Taylor (puisque[12] $|z-a| < |\xi - a|$), et écrire :

$$\frac{1}{\xi - z} \,=\, \frac{1}{\xi - a} + \frac{z-a}{(\xi-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\xi-a)^3} + \ldots + \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} + \ldots\ . \tag{3.27}$$

Reportant ce développement dans l'expression intégrale de $f_1(z)$ (voir (3.26)), on trouve :

$$f_1(z) \,=\, \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_R} f(\xi)\left[\frac{1}{\xi - a} + \frac{z-a}{(\xi-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\xi-a)^3} + \ldots + \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} + \ldots\right]\mathrm{d}\xi\ . \tag{3.28}$$

Intégrant terme à terme (il y a toujours convergence uniforme), on met en évidence le développement :

$$f_1(z) \,=\, \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{avec} \quad c_n \,=\, \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi \qquad (n = 0,\,1,\,2,\,3,\,\ldots)\ . \tag{3.29}$$

Ce développement peut faire penser à un développement du genre Taylor au sens où seules des puissances positives (ou nulles) de $(z-a)$ apparaissent, mais il n'en est pas un. En effet, c_n ne peut pas être écrit comme

[11] $\int_{-\gamma_r}$ désigne toujours l'intégrale le long du petit cercle γ_r parcouru dans le sens trigonométrique *négatif*.
[12] z est *dans* la couronne K, alors que ξ est sur le grand cercle γ_R, qui est la périphérie externe de K.

$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ puisque, par hypothèse, $f(z)$ est supposée analytique dans K seulement, et peut donc fort bien ne pas l'être dans le disque de rayon r, en particulier en a, auquel cas $f^{(n)}(a)$ peut tout simplement ne pas exister.

Pour la deuxième intégrale $f_2(z)$, on refait le même type de développement, avec la différence que maintenant $|z-a| > |\xi - a|$; pour faire apparaître une série géométrique convergente, il faut donc écrire :

$$\frac{1}{\xi - z} = -\frac{1}{z-a}\frac{1}{1-\frac{\xi-a}{z-a}} \ , \tag{3.30}$$

d'où :

$$\frac{1}{\xi - z} = -\frac{1}{z-a}\left[1 + \left(\frac{\xi-a}{z-a}\right) + \left(\frac{\xi-a}{z-a}\right)^2 + \ldots\right] = -\frac{1}{z-a} - \frac{\xi-a}{(z-a)^2} - \frac{(\xi-a)^2}{(z-a)^3} - \ldots \ . \tag{3.31}$$

Il en résulte :

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r} f(z)\left[-\frac{1}{z-a} - \frac{\xi-a}{(z-a)^2} - \frac{(\xi-a)^2}{(z-a)^3} - \ldots - \frac{(\xi-a)^{n-1}}{(z-a)^n} - \ldots\right]\mathrm{d}\xi \ . \tag{3.32}$$

soit :

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} \quad \text{avec} \quad c_{-n} = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r} f(\xi)(\xi-a)^{n-1}\,\mathrm{d}\xi \qquad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots) \ . \tag{3.33}$$

En changeant n en $-n$ dans la sommation pour f_2, la somme $f = f_1 + f_2$ prend la forme :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \ , \tag{3.34}$$

avec $c_{n\geq 0}$ toujours donné par (3.29), cependant que $c_{n<0}$ est donné par (3.33) où n est changé en $-n$:

$$c_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r} f(\xi)(\xi-a)^{-n-1}\,\mathrm{d}\xi \qquad (n = -1,\, -2,\, -3,\, \ldots) \ . \tag{3.35}$$

Par ailleurs, comme f est holomorphe dans la couronne K, les cercles γ_R et γ_r peuvent être déformés continûment[13] (tout en restant dans K, le domaine d'analycité de f) sans changer la valeur des deux intégrales (3.29) et (3.33) donnant les coefficients du développement de Laurent. En particulier, on peut dans tous les cas un seul et même contour, par exemple n'importe quel cercle situé dans la couronne (et centré en a). En définitive, les coefficients du développement (3.34) sont donnés par la formule suivante valable $\forall\, n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi \qquad (n = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \pm 3,\, \ldots) \ , \tag{3.38}$$

où γ désigne un cercle de rayon compris entre r et R – ou n'importe quel cycle homotope.

Le développement (3.34) porte le nom de *développement de Laurent.* Il est remarquable – et se distingue du développement *à la* Taylor – au sens où il contient toutes les puissances entières positives *et* négatives, et où les coefficients c_n ne sont pas *a priori* exprimables avec les dérivées de f. La série des puissances $n \geq 0$ ($f_1(z)$, (3.29)) est appelée *partie régulière* (ou parfois *partie entière*), celle des puissances négatives ($f_2(z)$, (3.33)) porte le nom de *partie principale*.

À ce stade, on a donc démontré le théorème suivant, dit de Laurent :

[13] D'ailleurs, on peut tout autant déformer le contour représenté sur la fig. 3.2 et le transformer en un tout petit cycle γ_z entourant le point z. Par (3.25) on voit que :

$$f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_z} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi \ , \tag{3.36}$$

et, suivant la définition (3.67), ceci s'écrit :

$$\int_{\gamma_z} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = 2\mathrm{i}\pi\,\mathrm{Res}(f,\, z) \ . \tag{3.37}$$

C'est le théorème des résidus avant l'heure !

Dans toute couronne K, $r < |z-a| < R$, une fonction qui y est analytique (holomorphe) peut être représentée par sa série de Laurent (3.34), uniformément convergente sur tout domaine fermé appartenant à K

Notons que si $f(z)$ est *en plus* holomorphe dans le petit disque de rayon r, alors tous les coefficients $c_{n<0}$ sont nuls (voir (3.35) – l'intégrand est holomorphe, étant de la forme $f(z)(z-a)^p$ avec $p \in \mathbb{N}$, et le contour est fermé) ; on retrouve alors un développement avec les seules puissances positives, les $c_{n\geq 0}$ étant cette fois $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, conformément à la généralisation de la formule de Cauchy pour les dérivées. *A contrario*, on voit que c'est bien la partie principale – quand elle existe – qui contient l'information sur le fait que f n'est pas *a priori* holomorphe dans le petit disque : l'existence de puissances négatives montre que f n'est visiblement pas bornée pour $z = a$. La classification des *singularités* d'une fonction se fera précisément sur la considération des caractéristiques de la partie principale du développement de Laurent centré sur un point singulier.

Enfin, on voit que si M désigne le maximum du module de f sur la circonférence de rayon $\rho \in]r, R[$, prise comme cercle γ, alors $|\xi - a| = \rho$ et (3.38) permet d'écrire :

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{M}{\rho^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi\right| = \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{n+1}}2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n} \qquad (n \in \mathbb{Z}) \ . \tag{3.39}$$

Pour illustrer l'exposé précédent, donnons quelques exemples. Soit la fonction :

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} \qquad (a < b) \ , \tag{3.40}$$

où, pour fixer les idées[14], a et b sont supposés tous deux réels et positifs. Soit à trouver le développement de Laurent de $f(z)$ dans la couronne délimitée par les deux cercles centrés à l'origine et de rayons a et b ($a < |z| < b$), où la fonction est holomorphe. On écrit :

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right) = \frac{1}{b-a}\left(-\frac{1}{b}\frac{1}{1-\frac{z}{b}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{a}{z}}\right) = \frac{1}{b-a}\left(-\frac{1}{b}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{b^n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{z^n}\right) \ , \tag{3.41}$$

d'où le développement de Laurent cherché :

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^{n-1}}{a-b}\frac{1}{z^n}}_{f_2(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a-b)b^{n+1}}\,z^n}_{f_1(z)} \qquad (a < |z| < b) \ . \tag{3.42}$$

On a ici $c_{n<0} = \frac{a^{n-1}}{a-b}$ et $c_{n\geq 0} = \frac{1}{(a-b)b^{n+1}}$. En un peu plus compliqué, soit la fonction :

$$f(z) = \mathrm{e}^{\frac{t}{2}(z-1/z)} \ . \tag{3.43}$$

Cette fonction, paramétrée par $t \in \mathbb{C}$, possède un développement de Laurent convergent, à t fini, pour $0 < |z| < \infty$; les coefficients c_n dépendent du paramètre t, et on les note traditionnellement $J_n(t)$:

$$\mathrm{e}^{\frac{t}{2}(z-1/z)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(t)\,z^n \ . \tag{3.44}$$

Les J_n sont les plus simples des illustrissimes fonctions de Bessel, que l'on rencontre si souvent en Physique[15]. D'après (3.38), on a :

$$J_n(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}(\xi-1/\xi)}}{\xi^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi \ ; \tag{3.45}$$

en prenant pour γ le cercle centré à l'origine et de rayon unité, on obtient l'expression intégrale suivante :

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\phi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sin\phi}\,\mathrm{d}\phi \qquad (n \in \mathbb{Z}) \ . \tag{3.46}$$

Ces fonctions J_n ne sont qu'une classe particulière de fonctions de Bessel.

[14] ce détail ne change rien au fond.

[15] Bessel était astronome.

3.3 Classification des singularités d'une fonction

Une singularité est un point du plan complexe où, pour une fonction donnée $f(z)$, "il se passe quelque chose". Pour l'instant, on laisse de côté les fonctions multiformes, du genre z^α (α non entier), $\ln z, \ldots$, et on ne considère que des fonctions ayant une et une seule détermination. Par ailleurs, la classification ci-après porte sur les points singuliers *isolés* : on dit que z_0 est un point singulier isolé de $f(z)$ s'il existe un voisinage $0 < |z - z_0| < R$ dans lequel f est analytique.

On a déjà rencontré ici et là cette notion. Par exemple, la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$; de fait, lorsque $z \to 0$, le module de f diverge : f n'est pas *bornée* en $z = 0$, ce point est une singularité de f. Plus précisément, on distingue (pour les fonctions non multiformes) trois types de singularités :

1. z_0 est un point singulier éliminable[16] lorsque la limite de la fonction $f(z)$ existe quand $z \to z_0$. Par exemple, pour les fonctions :
$$\frac{\sin z}{z}\ , \qquad \frac{\ln(1+z)^2}{z}\ , \qquad \frac{\mathrm{e}^z - 1}{\pi z}\ , \qquad \frac{1-\cos z}{z^2} \tag{3.47}$$
le point $z_0 = 0$ est une singularité éliminable, où les fonctions ont respectivement pour limite[17] $1, 2, \frac{1}{\pi}$ et $\frac{1}{2}$. Il peut aussi arriver que ce cas se produise à la suite d'une maladresse ou d'une inadvertance ; par exemple la fonction :
$$P(z) \,=\, \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \tag{3.48}$$
présente à première vue une singularité en z_0 où le dénominateur s'annule... mais le numérateur aussi : le dénominateur divise exactement le numérateur et, division faite, $P(z)$ apparaît comme étant le polynôme de degré $n-1$ égal à $\sum_{p=0}^{n-1} z_0^{n-p} z^p$, qui n'a aucune singularité (à distance finie).
Pour une singularité éliminable, on s'empresse de préciser la définition première de la fonction en ajoutant que, en ce point, la fonction vaut le nombre $f(z_0)$
2. z_0 est un pôle si $|f(z)| \to +\infty$ quand $z \to z_0$; autrement dit, la limite du module de f existe, mais est infinie. Par exemple, l'origine est un pôle pour les fonctions $\frac{1}{z^3}$, $\frac{1}{\sin z}$. Pour cette dernière fonction, il y a en fait une infinité dénombrable de pôles, tous les nombres $z_k = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. De même, $\frac{1}{\cosh z}$ a une infinité de pôles $z_k = \mathrm{i}(k + \frac{1}{2})\pi$, tout comme $\frac{1}{\mathrm{e}^{az}-1}$, dont les pôles sont les nombres $2\mathrm{i}k\frac{\pi}{a}$, $k \in \mathbb{Z}$
3. z_0 est un point singulier essentiel si la limite de $f(z)$ n'existe pas quand $z \to z_0$. Par exemple, $z_0 = 0$ est une singularité essentielle pour la fonction $\mathrm{e}^{1/z}$. En effet, si z tend vers zéro en venant de l'axe réel positif, la fonction diverge. Si z vient du côté $\mathbb{R}_-$, la fonction tend vers zéro. Plus généralement, si z arrive avec un argument quelconque, la fonction oscille à toute vitesse, et ce d'autant plus vite que $|z|$ est petit ; notamment, si $-\frac{\pi}{2} < \arg z < +\frac{\pi}{2}$, les parties réelle et imaginaire oscillent de plus en plus vite entre deux exponentielles divergentes ! Ceci illustre bien le fait que $\mathrm{e}^{1/z}$ n'a pas de limite quand $z \to 0$, ce qui est la signature d'une singularité essentielle[18].

Ces définitions s'illustrent immédiatement à propos du développement de Laurent suivant les puisssances de $(z - z_0)$, *c'est-à-dire centré*[19] *sur la singularité*, qui s'écrit explicitement :
$$f(z) \,=\, \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots \quad (0 < |z-z_0| < R)\ , \tag{3.49}$$

[16] On dit aussi *singularité apparente*.
[17] Ces limites se trouvent en utilisant les développements en série entière de $\sin z$, $\ln(1+z), \ldots$
[18] Ce type de singularité n'est pas une curiosité mathématique, mais survient fréquemment en Physique. Par exemple, la Mécanique quantique fait souvent apparaître des quantités du genre $\mathrm{e}^{A/\hbar}$, où A est une constante (en général complexe) et où $\hbar$ est la constante historique de Planck divisée par 2π. La limite classique correspond au cas où $\hbar$ est très petit devant une action typique du problème – autrement dit, prendre la limite classique c'est "faire tendre $\hbar$ vers zéro". On voit que la limite est ultra-singulière, dernier pied-de-nez de la Mécanique quantique au moment où on veut se passer de ses services...
[19] Comparer avec l'exemple traité plus loin, (3.60).

où R est à préciser pour chaque fonction f considérée. Pour une singularité éliminable, le développement de Laurent ne contient pas de puissances négatives (la partie principale $f_2(z)$ est identiquement nulle) :

$$f(z) \;=\; c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots \qquad (z_0 \text{ est une singularité éliminable}) \tag{3.50}$$

Par exemple, on a :

$$\frac{\sin z}{z} \;=\; 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \ldots \tag{3.51}$$

Ceci est le développement de Laurent centré en zéro avec $z_0 = 0$, et on voit qu'il n'y a pas de partie principale ($f_2(z) = 0$).

Pour un pôle, le module de f diverge, ce qui impose l'existence d'une partie principale non-identiquement nulle : alors, quand le rayon du petit disque délimitant la couronne devient de plus en plus petit, chacun des termes de la partie principale devient de plus en plus grand en module. Supposons que la première puissance négative est $(z - z_0)^{-n_0}$, $n_0 > 0$: on dit alors que le pôle est d'ordre n_0 ; tous les coefficients c_n, $n < -n_0$, sont nuls :

$$f(z) = \frac{c_{-n_0}}{(z - z_0)^{n_0}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots \qquad (z_0 \text{ est un pôle d'ordre } n_0) \tag{3.52}$$

Il est clair que si z_0 est un pôle pour $f(z)$, alors z_0 est un zéro pour la fonction $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. L'ordre n_0 du pôle de f est égal à l'ordre du zéro de $g(z)$. En effet, si z_0 est un zéro d'ordre n_0 de g, dans le voisinage de z_0 on peut écrire :

$$g(z) \;=\; (z - z_0)^{n_0} \phi(z) \tag{3.53}$$

où $\phi(z)$ ne s'annule pas en z_0. Il en résulte que :

$$f(z) \;=\; \frac{1}{(z - z_0)^{n_0}}\, \psi(z) \;\;, \tag{3.54}$$

où $\psi(z) = \frac{1}{\phi(z)}$ est analytique dans le voisinage de z_0 puisque $\phi(z_0) \neq 0$. f est donc de la forme :

$$f(z) \;=\; \frac{\psi(z_0)}{(z - z_0)^{n_0}} + \ldots \;\;, \tag{3.55}$$

les ... notant une série de puissances $(z - z_0)^{-n_0+p}$, p entier strictement positif. Ceci montre que la partie principale de f commence avec $(z - z_0)^{-n_0}$, donc que z_0, par définition, est un pôle d'ordre n_0.

À titre d'exemple, soit la fonction $f(z)$:

$$f(z) \;=\; \frac{\mathrm{e}^z}{(z - 1)^2} \;\;, \tag{3.56}$$

holomorphe pour $1 < |z| < R \quad \forall\, R$ fini, positif. En écrivant le numérateur sous la forme $\mathrm{e}\,\mathrm{e}^{z-1}$, on voit que son développement de Laurent autour de $z_0 = 1$ est :

$$\frac{\mathrm{e}^z}{(z - 1)^2} = \underbrace{\frac{\mathrm{e}}{(z - 1)^2} + \frac{\mathrm{e}}{z - 1}}_{f_2(z)} + \underbrace{\mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - 1)^n}{(n + 2)!}}_{f_1(z)} \qquad (|z| > 1) \;\; ; \tag{3.57}$$

Le point $z_0 = 1$ est un pôle d'ordre 2, ce que l'on peut évidemment deviner en regardant l'expression de $f(z)$ (3.56), et compte tenu de l'analyse conduisant à (3.55).

Enfin, pour une singularité essentielle, *tous* les coefficients c_{-n}, $n > 0$, sont non-nuls, les $c_{n'}$, $n' \geq 0$ étant ce qu'ils sont :

$$\begin{aligned} f(z) \;\;=\;\; & \ldots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \\ & + c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots \qquad (z_0 \text{ est une singularité essentielle}) \end{aligned} \tag{3.58}$$

et la partie principale contient de fait une infinité de termes. C'est le cas pour la fonction $f(z) = \mathrm{e}^{\alpha/z}$, dont le développement de Laurent (convergent $\forall\,|z| \in]\,0, +\infty\,[$) est :

$$\mathrm{e}^{\alpha/z} = \underbrace{\ldots + \frac{\alpha^n}{n!}\frac{1}{z^n} + \ldots + \frac{\alpha^2}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{\alpha}{z}}_{f_2(z)} + \underbrace{1}_{f_1(z)} \quad . \tag{3.59}$$

Notons que la partie régulière est constante et vaut 1, le seul coefficient $c_{n\geq 0}$ non nul étant $c_0 = 1$. En revanche, *tous* les coefficients $c_{n<0}$ sont finis, ce qui est caractéristique d'une singularité essentielle. Au voisinage d'une singularité essentielle, une fonction f prend *toutes* les valeurs complexes possibles (c'est l'essence du théorème dit de Weierstrass - Sokhostski).

Il faut bien comprendre qu'une fonction donnée $f(z)$ n'a pas *un* développement de Laurent, mais autant qu'on veut, selon le choix du centre et les rayons de la couronne choisie. Par exemple, soit la fonction :

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \quad ; \tag{3.60}$$

c'est une fonction méromorphe possédant l'unique pôle $z_0 = 1$, qui est d'ordre 1. Un premier développement peut être écrit en prenant la couronne centrée à l'origine (qui n'est pas une singularité) de rayons $r > 1$ et $R > r > 1$:

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n} \qquad (|z| > 1) \ . \tag{3.61}$$

L'existence d'une infinité de termes de puissances négatives ne signifie pas que $z_0 = 0$ est une singularité essentielle ! En effet, le développement de Laurent effectué ci-dessus est centré sur $z = 0$, où la fonction est bornée et dans le voisinage duquel elle est holomorphe : $z = 0$ n'est donc pas une singularité de f – et d'ailleurs (3.61) n'a ici de sens que pour $|z| > 1$: pas question d'y faire $z = 0$! La classification ci-dessus se réfère au contraire au cas particulier où ce développement est centré sur une singularité. Ainsi, le développement de Laurent centré sur $z = 1$ existe et n'est autre que ...

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \qquad (!!!) \tag{3.62}$$

Tous les coefficients c_n sont nuls, sauf c_{-1}, qui vaut 1. De la même façon, un autre développement[20] dans la couronne $0 < |z| < 1$ est :

$$f(z) = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \qquad (|z| < 1) \ , \tag{3.63}$$

et ne doit pas faire conclure, au motif que toutes les puissances sont positives, que $f(z)$ n'a pas de pôle (il y en a bien un, en dehors du disque de convergence de la série[21] (3.63)) ! Dans le même ordre d'idées, on peut revenir à l'exemple donné en (3.40) et (3.41) : la fonction f définie en (3.40) a deux pôles a et b d'ordre 1, alors que le développement centré sur l'origine, (3.42), contient *toutes* les puissances z^n avec $n \in \mathbb{Z}$, mais n'est pas valide en $z = a$ ou b.

D'une façon générale, l'identification des singularités au seul vu d'un développement de Laurent peut être périlleuse. Le bon ordre pour procéder est de partir de la fonction elle-même, de préciser son domaine d'holomorphie en localisant ses singularités, et, si nécessaire[22], d'en préciser la nature en effectuant le bon développement de Laurent. Raisonner en sens contraire – disposer d'un développement obtenu d'une façon ou d'une autre et lui faire dire des choses inconsidérément – peut conduire à des âneries[23], tant que l'on ne sait pas

[20] C'est en fait un développement de Taylor, pusiqu'il n'y a pas de partie principale.

[21] D'ailleurs, le fait que les développements (3.61) et (3.63) divergent pour $|z| = 1$ laissent suspecter une singularité sur le cercle unité.

[22] Le plus souvent, c'est à l'œil (en regardant la fonction) que l'on peut spécifier complètement ses singularités.

[23] D'où la difficulté pour le physicien, quand il ne dispose que d'un développement qu'il ne sait pas resommer... (ou, pire, quand il ne dispose que des *premiers* termes d'un développement qu'il suppose exister sans en avoir en général d'autre preuve qu'une intime conviction...). Les exemples ci-dessus permettent de mettre le doigt sur la subtilité, mais gardent un caractère académique dans la mesure où toutes les séries se resomment trivialement.

resommer le développement pour identifier la fonction et/ou préciser avec certitude le domaine de convergence du développement.

Pour terminer l'énoncé de cette classification, donnons un exemple de singularité non-isolée, qui y échappe. La fonction :

$$f(z) \;=\; \frac{1}{\mathrm{e}^{1/z}+1} \tag{3.64}$$

a une infinité de pôles puisque le dénominateur s'annule pour $\mathrm{e}^{1/z} = -1 = \mathrm{e}^{(2k+1)\mathrm{i}\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, soit pour la suite de nombres :

$$z_k \;=\; -\mathrm{i}\frac{1}{(2k+1)\pi} \quad . \tag{3.65}$$

Cette suite tend vers zéro quand $k \to +\infty$: l'origine est un point d'adhérence des zéros du dénominateur qui font diverger le module de f : l'origine est bien une singularité, mais elle n'est pas isolée. Dans un genre différent, la coupure relative à une fonction multiforme est en fait une ligne *continue* de singularités – lesquelles sortent également de la classification en cours.

Selon la nature des singularités, on définit deux classes de fonctions analytiques[24] :

- les fonctions *entières*, qui n'ont aucune singularité à distance finie[25]. Toute fonction entière peut être représentée par un développement en série entière :

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \tag{3.66}$$

  qui converge dans le plan ouvert. e^z est une fonction entière[26], tout comme les fonctions trigonométriques (circulaires ou hyperboliques)

- les fonctions *méromorphes*, dont les seules singularités sont des pôles, éventuellement à l'infini. Il en résulte que dans tout domaine *borné*, une fonction méromorphe ne peut avoir qu'un nombre *fini* de pôles : dans le cas contraire, il existerait une suite de pôles convergeant vers une singularité qui ne saurait être une singularité isolée. En revanche, dans tout le plan, une fonction méromorphe peut avoir une infinité de pôles : c'est le cas par exemple de $\frac{1}{\sin z}$. La somme, le produit et le quotient de deux fonctions méromorphes sont des fonctions méromorphes. Une fonction entière (qui a des pôles à l'infini) est une fonction méromorphe.

3.4 Théorème des résidus

Ce théorème est probablement le plus connu de tous ceux relatifs aux fonctions d'une variable complexe : sans doute, on s'en souvient encore quand on a oublié tous les autres. Cette notoriété est justifiée par l'immensité de ses applications dans toutes les disciplines où un peu de mathématique est nécessaire. En Physique, notamment, il joue un rôle de tout premier plan, et vient même illustrer de façon spectaculaire certains grands principes physiques, comme le principe de causalité : on verra comment la nécessité exprimée par ce principe (les effets sont postérieurs aux causes) impose aux fonctions de réponse d'un système, *via* ce théorème[27], de posséder des propriétés d'analycité bien précises.

[24] À nouveau, répétons que l'on ne considère toujours pas le cas de fonctions multiformes.

[25] Selon le théorème de Liouville, une fonction qui n'a aucune singularité dans le plan fermé $\bar{\mathbb{C}}$ est constante. Une fonction ne varie que si elle a des singularités quelque part, éventuellement à l'infini, $|z| = \infty$. Pour une fonction entière, l'infini du plan complexe, c'est un peu comme le nuage de Oort pour les comètes : sans lui, il ne se passerait rien.

[26] . . . mais n'est visiblement pas constante ! e^z diverge si z tend vers l'infini le long de l'axe réel positif : il y a bien une singularité quelque part, dont la nature sera précisée ultérieurement (en fait, on peut deviner que le point à l'infini est, pour e^z, une singularité essentielle, tout comme l'origine l'est pour $\mathrm{e}^{1/z}$).

[27] En réalité, c'est un peu l'histoire de la poule et de l'œuf. . .

3.4.1 Définitions et recettes de calcul des résidus

La définition du *résidu* est la suivante. Soit une fonction $f(z)$ holomorphe possédant un point singulier isolé z_0. Le résidu de f en z_0, noté Res $(f,\, z_0)$ est par définition le nombre :

$$\mathrm{Res}(f,\, z_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_{z_0}} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{3.67}$$

où γ_{z_0} est une circonférence $|z-z_0| = \rho$ suffisamment petite pour n'inclure aucune autre singularité[28], et parcourue une fois dans le sens positif, laissant donc toujours le point z_0 à gauche. Par le théorème de Cauchy, quand toutes ces conditions sont satisfaites l'intégrale ne dépend pas du rayon ρ de la circonférence décrite. Si on se réfère à la formule (3.38) donnant les coefficients du développement de Laurent centré sur a, on voit que l'intégrale au second membre de (3.67) n'est autre que celle de (3.38) avec $a = z_0$ pour $n = -1$; on en déduit immédiatement :

$$\mathrm{Res}(f,\, z_0) \;=\; c_{-1} \;\; . \tag{3.68}$$

Le résidu d'une fonction en un point singulier z_0 n'est donc rien d'autre que le coefficient c_{-1} du terme en $\frac{1}{z-z_0}$ de son développement de Laurent (coefficient de la première puissance négative[29]).

Une autre façon de retrouver ce résultat est la suivante. Écrivons le développement de Laurent de $f(z)$:

$$f(z) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n \;\; . \tag{3.69}$$

et intégrons terme à terme sur une petite circonférence γ_{z_0} entourant z_0 ; en vertu de :

$$\int_{\gamma_{z_0}} (z-z_0)^n\,\mathrm{d}z \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2\mathrm{i}\pi & \text{si } n = -1 \end{cases} \;\; , \tag{3.70}$$

il vient[30] :

$$\int_{\gamma_{z_0}} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \times 2\mathrm{i}\pi\delta_{n\,-1} \;=\; 2\mathrm{i}\pi\, c_{-1} \;\; . \tag{3.71}$$

En pratique, pour calculer le résidu d'une fonction en un pôle, on dispose de plusieurs formules commodes. Si z_0 est un pôle d'ordre 1, alors :

$$f(z) \;=\; \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots \tag{3.72}$$

et une façon rapide d'avoir $c_{-1} = \mathrm{Res}(f,\, z_0)$ est de prendre la limite $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$:

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \;=\; \lim_{z\to z_0}[c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + \ldots \;=\; c_{-1} \;\; ; \tag{3.73}$$

d'où la recette :

$$\mathrm{Res}(f,\, z_0) \;=\; \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \qquad\qquad (\text{pôle d'ordre 1}) \;\; . \tag{3.74}$$

Pour un pôle d'ordre n, on a :

$$f(z) \;=\; \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots \tag{3.75}$$

et la recette précédente ne marche plus (en formant $(z-z_0)f(z)$, le second membre diverge à la limite). En revanche, l'astuce suivante fonctionne. On multiplie d'abord membre à membre (3.75) par $(z-z_0)^n$, ce qui donne :

$$(z-z_0)^n f(z) \;=\; c_{-n} + \ldots + c_{-2}(z-z_0)^{n-2} + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + c_0(z-z_0)^n + c_1(z-z_0)^{n+1} + \ldots \;\; . \tag{3.76}$$

[28] d'où l'importance de distinguer entre singularité isolée – le cas ici – et singularité non isolée.
[29] En un point singulier éliminable, le résidu est donc nul.
[30] $\delta_{n\,n'}$ est le symbole de Kronecker.

Ensuite, on dérive $n-1$ fois par rapport à z, ce qui fait disparaître $c_{-n}, c_{-n+1}, \ldots, c_{-2}$:

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)] = (n-1)!\, c_{-1} + \frac{n!}{1!}\, c_0(z-z_0) + \frac{(n+1)!}{2!}\, c_1(z-z_0)^2 + \ldots \ . \tag{3.77}$$

Il suffit maintenant de prendre la limite $z \to z_0$ pour que seul subsiste le terme c_{-1} au second membre. D'où la formule :

$$\mathrm{Res}(f,\, z_0) \equiv c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)] \qquad \text{(pôle d'ordre n)} \ . \tag{3.78}$$

Clairement, (3.74) est un cas particulier de (3.78) (il suffit d'y faire $n = 1$).

Une autre formule utile est la suivante. Quand $f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$ où $\psi(z)$ a un zéro simple en z_0 et où $\phi(z)$ est holomorphe en z_0, on a :

$$\mathrm{Res}(f,\, z_0) = \lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)\frac{\phi(z)}{\psi(z)}\right] = \lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)\frac{\phi(z)}{\psi(z)-\psi(z_0)}\right] = \lim_{z\to z_0}\left[\frac{\phi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}\right] = \frac{\phi(z_0)}{\psi'(z_0)} \ . \tag{3.79}$$

Bien évidemment, si $\phi(z_0) = 0$, le résidu est nul, ce qui signifie tout simplement que z_0 est en fait une singularité éliminable.

Traitons un exemple. Soit la fonction $f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$, avec $a \in \mathbb{R}_+$ pour fixer les idées ; cette fonction a deux pôles simples en $\pm \mathrm{i}a$. Le résidu en $\mathrm{i}a$ est :

$$\mathrm{Res}(f,\, \mathrm{i}a) = \lim_{z\to \mathrm{i}a}(z-\mathrm{i}a)\frac{1}{(z-\mathrm{i}a)(z+\mathrm{i}a)} = \frac{1}{2\mathrm{i}a} \ . \tag{3.80}$$

Quel est son développement de Laurent centré en $z_0 = \mathrm{i}a$? On voit de suite qu'il en existe un[31] dans la couronne délimitée par les deux cercles centrés en $\mathrm{i}a$ et de rayons a et $2a$. On écrit alors :

$$\frac{1}{(z-\mathrm{i}a)(z+\mathrm{i}a)} = \frac{1}{z-\mathrm{i}a}\,\frac{1}{z-\mathrm{i}a+2\mathrm{i}a} = \frac{1}{z-\mathrm{i}a}\,\frac{1}{2\mathrm{i}a}\,\frac{1}{1+\frac{z-\mathrm{i}a}{2\mathrm{i}a}} = \frac{1/(2\mathrm{i}a)}{z-\mathrm{i}a} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-\mathrm{i}a)^n}{(2\mathrm{i}a)^{n+1}} \ ; \tag{3.81}$$

la partie principale se réduit au terme $\frac{c_1}{z-\mathrm{i}a}$, comme il se doit pour un pôle d'ordre 1. Le résidu en $\mathrm{i}a$ donné en (3.80) est bien égal au coefficient c_{-1} du bon développement de Laurent (3.81).

3.4.2 Démonstration du théorème des résidus

Pour démontrer le théorème des résidus dans le cas le plus simple, considérons une fonction $f(z)$ holomorphe dans un domaine $\mathcal{D}$ à l'exception d'un seul point singulier isolé z_0, et intégrons-la sur un contour fermé Γ quelconque, inclus dans $\mathcal{D}$ et ne contenant pas z_0. D'après le théorème de Cauchy, on a :

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \ . \tag{3.82}$$

Maintenant, déformons le contour *ad libitum*, $\Gamma \to \Gamma' \to \Gamma''$ (voir fig. 3.3) tout en lui faisant éviter le point z_0 – en vertu du théorème de Cauchy, la valeur de l'intégrale ne change pas et est toujours égale à zéro :

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma'} f(z)\,\mathrm{d}z = \ldots = 0 \ . \tag{3.83}$$

En particulier, on peut en venir au contour Γ'', formé d'une petite circonférence γ_{z_0} autour de z_0, des deux petits segments de droite[32] AB et DE infiniment proches (parcourus en sens opposés) et d'une ligne C "refermant le tout". Les contributions des deux petits segments se compensent, et il reste[33] :

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{-\gamma_{z_0}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \iff \int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{z_0}} f(z)\,\mathrm{d}z \ . \tag{3.84}$$

[31] L'autre pôle, $-\mathrm{i}a$, ne saurait appartenir à la couronne K.
[32] qui pourraient d'ailleurs être tout autant deux petits arcs de forme quelconque mais, pour la démonstration, toujours infiniment proches l'un de l'autre.
[33] Les deux points A et E sont en fait confondus, de sorte que le "grand" contour C est bien fermé, l'adjonction ou la suppression du point A (ou E) ne changeant rien à la valeur de l'intégrale de ligne puisque f est continue.

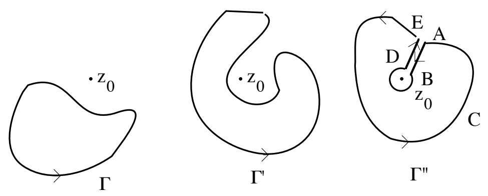

Figure 3.3: Le contour Γ et ses avatars évitant soigneusement la singularité z_0.

Par la définition du résidu (3.67), cette dernière équation se lit :

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\mathrm{i}\pi\,\mathrm{Res}(f,\,z_0)\ . \tag{3.85}$$

Ainsi, l'intégrale sur le contour C est égale à l'intégrale sur la (petite) circonférence γ_{z_0}. On retrouve à nouveau l'invariance de l'intégrale quand le contour est déformé : en étirant la petite circonférence, on peut la superposer à C et inversement. Le point remarquable est que le calcul de l'intégrale sur C se ramène au calcul de quantités locales : le résidu en z_0, valeur de l'intégrale le long d'une circonférence (ou clairement de toute boucle) éventuellement infiniment petite entourant z_0. Ce résultat majeur est illustré sur la fig. 3.4. Notons que les deux boucles C et γ sont parcourues dans le *même* sens, et que si le sens de parcours est inversé, alors toutes les intégrales changent de signe.

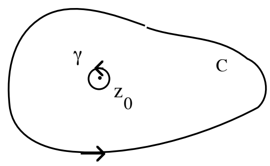

Figure 3.4: Illustration du théorème des résidus dans le cas d'une seule singularité z_0. On peut étirer le petit cercle γ pour le superposer à la grande boucle C, ou inversement, sans changer la valeur de l'intégrale.

Ce résultat se généralise au cas d'un nombre fini, N de singularités z_k, $k = 1, 2, \ldots, N$: pour chacune d'entre elles, on se livre aux mêmes déformations du contour que pour z_0 ci-dessus. Dès lors, on peut énoncer précisément le théorème des résidus (Cauchy, 1825) :

Soit $f(z)$ une fonction continue[34] *sur la frontière C d'un domaine $\mathcal{D}$ et partout holomorphe dans ce domaine sauf en un nombre fini de points z_k, $k = 1, 2, \ldots, N$. Alors :*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\mathrm{i}\pi\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Res}(f,\,z_k)\ , \tag{3.86}$$

où la frontière C est décrite de sorte que le domaine $\mathcal{D}$ se trouve à gauche dans le sens de parcours

On verra que ce théorème est d'une extrême utilité en pratique, et quelques exemples d'application seront données au ch. 4. Quoi qu'il en soit, il exprime d'une nouvelle façon ce fait majeur : s'agissant des fonctions holomorphes, la forme précise du contour d'intégration importe peu (dans le cas d'une seule singularité z_0, l'intégrale sur le grand contour C est égale à l'intégrale sur tout petit cercle[35] γ_{z_0}). On peut le déformer à souhait à deux conditions : ne pas le fait décoller du plan et éviter les singularités, ce qui, pour un mouvement purement dans le plan, revient à les *contourner*. Rappelons une fois encore l'image utile déjà mentionnée : le

[34] Comme d'habitude, on entend par là que $\lim_{z\to a}$ existe $\forall\, a \in C$, z tendant vers a en venant de *l'intérieur* du domaine $\mathcal{D}$.
[35] ou toute petite boucle.

plan $\mathbb{C}$ est une planche en bois, les singularités sont des clous à demi enfoncés, le contour est un élastique dont les extrémités sont fixées par deux punaises, mais qui peut être déformé sans perdre le contact avec la planche, les clous se chargeant de lui faire faire obstacle pour contourner les singularités. Il est clair que pour pouvoir jouer à ce petit jeu, l'hypothèse que les singularités sont *isolées* est essentielle, et l'identification exhaustive des singularités un préalable absolu à tout calcul.

D'un autre côté, rien d'autre n'est requis en ce qui concerne la nature des singularités (pôles, singularités essentielles, ...). Qu'il s'agisse d'un point singulier éliminable (alors le résidu est évidemment nul), d'un pôle (quel que soit son ordre) ou d'une singularité essentielle, le théorème est vrai.

À titre d'illustration, considérons la fonction $f(z) = z^n \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, qui a une singularité essentielle en $z = 0$. Son développement de Laurent centré à l'origine est :

$$f(z) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{p!}\frac{1}{z^{p-n}} \quad , \tag{3.87}$$

sur lequel on voit que le coefficient c_{-1} de $\frac{1}{z}$ est $\frac{1}{(n+1)!}$, donc que $\mathrm{Res}(f,\, 0) = \frac{1}{(n+1)!}$. Le théorème des résidus permet donc d'écrire :

$$I \stackrel{\text{déf}}{=} \int_C z^n \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}z = \frac{2\mathrm{i}\pi}{(n+1)!} \quad , \tag{3.88}$$

où C est n'importe quel contour fermé entourant l'origine et parcouru dans le sens positif. À titre d'exercice, ce résultat peut être retrouvé directement au coup par coup de diverses façons ; l'une d'entre elles est la suivante.

Prenons pour C le cercle γ de rayon R centré à l'origine, sur lequel $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, θ variant sur un intervalle d'amplitude 2π, de 0 à 2π par exemple :

$$I = \int_0^{2\pi} (R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n \mathrm{e}^{\frac{1}{R}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \quad . \tag{3.89}$$

En développant en série l'exponentielle $\mathrm{e}^{\frac{1}{R}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}$, on obtient :

$$I = \mathrm{i}\sum_{q\in\mathbb{N}} \frac{R^{n-q+1}}{q!}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-q+1)\theta}\,\mathrm{d}\theta \quad . \tag{3.90}$$

En utilisant maintenant $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}r\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\delta_{r\,0}$:

$$I = \mathrm{i}\sum_{q\in\mathbb{N}} \frac{R^{n-q+1}}{q!}\delta_{q\,n+1} = \mathrm{i}\times 2\pi\frac{1}{(n+1)!} \tag{3.91}$$

en accord avec (3.88) donné directement par le théorème des résidus.

3.5 Prolongement analytique

La notion de prolongement analytique est simple à appréhender. Soit une fonction holomorphe $f(z)$ définie dans un domaine $\mathcal{D}_1$ du plan complexe par une certaine relation d'égalité (expression, série, intégrale,...) dénuée d'ambiguïté. Dans quelle mesure, l'expression de définition de f est-elle sensée dans un domaine $\mathcal{D}_2$ distinct de $\mathcal{D}_1$, et englobant tout ou partie[36] de $\mathcal{D}_1$? Autrement dit, dans quelle mesure peut-on *étendre* le domaine de définition de la fonction au-delà du domaine apparaissant "naturellement" lors de la première définition ?

Pour préciser les choses, donnons des exemples. Soit la fonction $f_1(z)$ définie comme étant égale à la somme de la série géométrique :

$$f_1(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n \quad . \tag{3.92}$$

[36] autrement, la question est sans intérêt.

On sait bien que cette série ne converge que si $|z| < 1$ – elle n'est autre qu'une certaine série de Taylor ; autrement dit, $f_1(z)$, en tant que fonction de z, n'est définie par la relation (3.92) qu'à l'intérieur du disque unité centré à l'origine. Une écriture plus précise (et plus correcte !) est donc :

$$f_1(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n \qquad \forall z,\ |z| < 1 \ . \tag{3.93}$$

Soit maintenant la fonction $f_2(z)$:

$$f_2(z) = \frac{1}{1-z} \ , \tag{3.94}$$

qui est définie partout dans $\mathbb{C}$ sauf au point $z = 1$. Quelle est la relation entre les deux fonctions f_1 et f_2 ? On sait bien que la somme de la série (3.92) est égale à $(1-z)^{-1}$, autrement dit la somme de la série (3.92) – qui n'existe que pour $|z| < 1$ – est égale partout où elle est définie à la fonction f_2 qui existe, elle, dans un domaine beaucoup plus grand de $\mathbb{C}$. On peut donc dire que $f_2(z)$ est le *prolongement* de la série dont la somme est la fonction f_1 dans un domaine plus vaste, englobant d'ailleurs le domaine de définition de f_1. Plus formellement, on peut donc dire que la fonction $(1-z)^{-1}$ est le prolongement de la série géométrique (3.92) sur (sauf en $z = 1$) et au-delà du disque unité ; comme $f_2(z)$ est une fonction analytique, sauf en $z = 1$, on dit qu'elle est le prolongement *analytique* de $f_1(z)$.

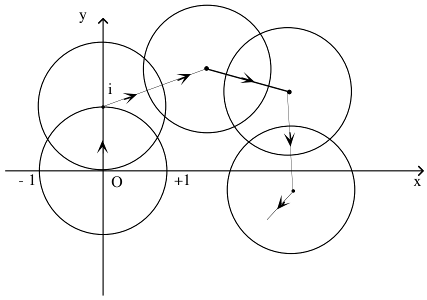

Figure 3.5: Illustration des prolongements analytiques succcessifs de $f_1(z)$, (3.92), en procédant de proche en proche par des disques de rayon unité (le premier disque est centré en i et correspond à (3.99)). Ceci permet de comprendre que la fonction peut bien être prolongée dans tout le plan et que son expression compacte n'est autre que $\frac{1}{1-z}$, holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

D'ailleurs, on peut aussi prolonger directement la fonction définie par la série (3.92) – en feignant d'ignorer que l'on sait la resommer – en trouvant son développement de Laurent autour de tout point judicieusement choisi, et donnant lieu à un domaine de convergence recouvrant au moins partiellement le domaine initial $|z| < 1$. Choisissons le point i et récrivons (3.92) sous la forme :

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (z - \mathrm{i} + \mathrm{i})^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p\, \mathrm{i}^{n-p}(z-\mathrm{i})^p \ . \tag{3.95}$$

Dans le domaine commun aux deux disques $|z| < 1$ et $|z - \mathrm{i}| < 1$, toutes les séries rencontrées convergent uniformément et on peut échanger les ordres de sommation :

$$f_1(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} (z-\mathrm{i})^p \sum_{n=p}^{+\infty} \mathrm{C}_n^p\, \mathrm{i}^{n-p} \ . \tag{3.96}$$

En utilisant[37] :

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{C}_{n+p}^p x^n \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{C}_{n+p}^p\, \mathrm{i}^n = \frac{1}{(1-\mathrm{i})^{p+1}} \ , \tag{3.98}$$

[37] l'égalité (3.98) est le développement de Taylor en $x = 0$ de $(1-x)^{-(p+1)}$, construit en remarquant que :

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}{(1-x)^{p+1}} = \frac{(n+p)!}{p!(1-x)^{p+1}} = n!\mathrm{C}_{n+p}^p \frac{1}{(1-x)^{p+1}} \ . \tag{3.97}$$

(3.96) devient :

$$f_1(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(1-\mathrm{i})^{p+1}}(z-\mathrm{i})^p \ , \tag{3.99}$$

qui est le développement de Laurent[38] de f_1 centré sur i (la partie principale est nulle). La série ainsi obtenue converge dans le disque $|z-\mathrm{i}| < |1-\mathrm{i}| = \sqrt{2}$, qui étend le domaine de définition de f_1 : ici encore, il s'agit d'un prolongement analytique. La procédure peut d'ailleurs être poursuivie, élargissant de proche en proche le domaine de définition de f_1. On vérifiera que toutes les expressions obtenues, une fois resommées (ici on sait resommer !) donnent toutes $\frac{1}{1-z}$, comme il se doit.

Comme second exemple, soit l'intégrale[39] :

$$f_1(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t \qquad (t \in \mathbb{R}) \ . \tag{3.100}$$

t étant toujours positif, cette intégrale n'existe que pour $\Re z > 0$ (sinon l'intégrand diverge exponentiellement à l'infini). Une écriture plus correcte pour définir la fonction f_1 dans (3.100) est donc :

$$f_1(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t \qquad (t \in \mathbb{R}) \qquad \forall\, z,\, \Re z > 0 \ . \tag{3.101}$$

Autrement dit, la relation (3.100) ne définit la fonction $f_1(z)$ que dans le demi-plan de droite des nombres complexes à partie réelle strictement positive. Soit maintenant la fonction :

$$f_2(z) = \frac{1}{z} \qquad \forall\, z,\, z \neq 0 \ . \tag{3.102}$$

On sait bien que, quand elle existe, l'intégrale (3.101) est précisément égale à $\frac{1}{z}$. La fonction f_2, définie partout sauf en $z = 0$, réalise le prolongement de f_1 bien au-delà du demi-plan de droite – en fait dans tout le plan excepté le point $z = 0$. De la même façon, on dit que $f_2(z)$ est le prolongement analytique de f_1 dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ces deux exemples montrent bien qu'une relation donnée, valide dans un certain domaine, produit l'expression d'une fonction qui peut avoir un sens (être définie) dans un domaine beaucoup plus vaste. Le théorème suivant énonce les conditions permettant d'affirmer qu'une fonction f_2 est le *prolongement analytique* d'une fonction f_1 :

> *Soit deux domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dont les frontières possèdent un arc commun Γ et soit deux fonctions f_1 et f_2 analytiques respectivement dans $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Si ces deux fonctions sont continues sur $\mathcal{D}_1 \bigcup \Gamma$ et $\mathcal{D}_2 \bigcup \Gamma$, et si elles prennent les mêmes valeurs en tout point de l'arc commun Γ, alors f_2 (resp. f_1) est le prolongement analytique de f_1 (resp f_2) dans le domaine $\mathcal{D}_2$ (resp. $\mathcal{D}_1$)*

En effet, soit la fonction :

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \forall z \in \mathcal{D}_1 \\ f_1(z) = f_2(z) & \forall z \in \Gamma \\ f_2(z) & \forall z \in \mathcal{D}_2 \end{cases} \tag{3.103}$$

qui est une fonction continue sur $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \bigcup \mathcal{D}_2$. On va montrer que son intégrale le long de tout contour fermé situé dans $\mathcal{D}$ est nulle, ce qui, compte tenu du théorème de Morera, permet de conclure que f est analytique dans $\mathcal{D}$.

Il suffit de considérer deux contours C_1 et C_2 parcourus dans le même sens, situés dans $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et ayant un arc longeant de l'intérieur de chaque domaine l'arc commun Γ. Comme chaque fonction f_j est analytique dans son $\mathcal{D}_j$, on a :

$$\int_{C_j} f_j(z)\,\mathrm{d}z = 0 \qquad (j = 1, 2) \ . \tag{3.104}$$

[38] On peut aussi trouver ce développement en utilisant la formule (3.38), et prenant pour $f(\xi)$ la série (3.92).

[39] Comme on le verra, $F(z)$ est la transformée de Laplace de la fonction qui vaut partout 1 sur le demi-axe réel positif.

Il en résulte notamment :

$$\int_{C_1} f_1(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f_2 z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \int_{C_1 \bigcup C_2} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0 \ . \tag{3.105}$$

Les deux contributions le long de l'arc commun sont manifestement de signes opposés, quel que soit le sens de parcours. Il en résulte que la contribution de l'arc commun disparaît du total et que seule subsiste l'intégrale le long du contour C formé de la réunion des C_j d'où Γ a été effacé :

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0 \ . \tag{3.106}$$

L'intégrale de $f(z)$ le long du contour fermé C inclus dans $\mathcal{D}$ est donc nulle. D'après le théorème de Morera, f est donc une fonction analytique dans $\mathcal{D}$. Ceci montre que le prolongement par *continuité* d'une fonction est une fonction analytique : non seulement il étend la définition de la fonction de départ à un domaine plus vaste, mais encore le résultat est une fonction douée d'analycité[40].

Quand les deux domaines $\mathcal{D}_j$ se recouvrent, et que les fonctions sont égales entre elles dans la région commune, on dit souvent que l'une réalise le prolongement analytique *immédiat* de l'autre.

Revenons aux deux exemples ci-dessus, où on a su construire d'instinct le prolongement analytique, ce qui est une façon de se convaincre qu'il est en soi possible. Fondamentalement, cette possibilité résulte du fait que sur la frontière *fermée* de définition de f_1, la fonction prolongée ne possède qu'un nombre dénombrable de singularités, une seule en la circonstance ($z = 1$ pour la série géométrique, $z = 0$ pour l'intégrale de Laplace). Ce qui veut dire qu'un piéton peut toujours sortir de $\mathcal{D}_1$ en contournant toute singularité qu'il rencontrerait sur son chemin, ou encore que l'ensemble des singularités est plein de vide, particulièrement lacunaire (comme la matière ordinaire). L'image que l'on peut retenir : il doit être possible de se *faufiler* entre les singularités.

De fait, le prolongement analytique n'est pas toujours possible. Par exemple, soit la fonction :

$$f_1(z) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} z^{2^n} \ . \tag{3.107}$$

Cette série converge $\forall\, z,\ |z| < 1$, mais diverge visiblement pour $z = 1$ (et même effroyablement si $|z| > 1$!). Par ailleurs, on a trivialement :

$$f_1(z) \;=\; z^2 + z^4 + z^8 + \ldots \;=\; z^2 + [(z^2)^2 + (z^2)^4 + (z^2)^8 \ldots] \ , \tag{3.108}$$

de sorte que la relation fonctionnelle suivante est vraie :

$$f_1(z) \;=\; z^2 + f_1(z^2) \ . \tag{3.109}$$

Ceci montre que $f_1(z)$ a aussi[41] des singularités en $z^2 = 1$, soit $z = \pm 1$. Plus généralement, en itérant la relation fonctionnelle (3.109), on a :

$$f_1(z) \;=\; z^2 + z^4 + z^8 + \ldots + z^{2^n} + f_1(z^{2^n}) \ . \tag{3.110}$$

Donc f_1 a aussi des singularités en $z^{2^n} = 1$, soit aux sommets du polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans le cercle de rayon unité, et ainsi de suite : f a un ensemble dense de singularités sur le cercle de rayon 1 ; cet ensemble de singularités forme un rempart infranchissable, révélant l'impossibilité de prolonger analytiquement f_1 au-delà de ce cercle. On dit alors que le cercle est la frontière *essentielle* de $f_1(z)$, que le disque est le *domaine d'existence* de f_1, qui est alors qualifiée de fonction analytique *complète*.

[40] Notons que ce théorème n'est pas vrai pour des fonctions réelles : soit deux fonctions dérivables sur deux intervalles $[a,\, b]$ et $[b,\, c]$, égales au point commun b. Leur réunion n'est pas forcément dérivable (il peut y avoir un point anguleux en b).

[41] ce qui est immédiat, $f_1(Z)$ ayant une singularité en $Z = 1$ (il suffit de prendre $Z = z^2$).

3.6 Fonctions multiformes. Coupures. Notion de surface de Riemann

Des exemples de fonctions multiformes ont déjà été donnés : $\ln z$, z^α, $\alpha \notin \mathbb{Z}$. La caractéristique d'une fonction multiforme est de ne pas reprendre forcément la même valeur quand on décrit certains chemins continus fermés dans le plan. Par exemple, prenons la branche de fonction $z^{\frac{1}{2}}$ qui vaut 1 en $z = 1$, soit $\sqrt{|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Effectuons un tour complet en suivant n'importe quelle courbe partant de $z = 1$ et y revenant[42] *en contournant l'origine.* Au départ, la branche vaut 1, à l'arrivée elle vaut $(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi})^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$. Le même phénomène se produit pour l'autre branche de la fonction racine carrée. Il en va de même pour le logarithme, quelle que soit la branche choisie : quand z décrit une courbe fermée autour de l'origine, son argument varie de 2π et la branche choisie, quelle qu'elle soit, diffère[43] de $\pm 2\mathrm{i}\pi$ de la valeur de départ. Le parcours d'un tel contour fermé induit donc pour une fonction multiforme une sorte de discontinuité, à l'instar d'une fonction d'une variable réelle en un saut de première espèce : selon que l'on arrive de la gauche ou de la droite, la limite de la fonction n'est pas la même.

Il en irait de même si le point de départ (et le point d'arrivée) était n'importe quel point du plan d'argument quelconque, pas forcément un point de l'axe réel positif, pourvu que l'on fasse un circuit fermé autour de O. Il en résulte que le problème n'est pas le demi-axe réel, mais bel et bien l'origine O. Un tel point bizarre (c'est en fait un point singulier d'une nouvelle sorte) est appelé *point de branchement* : c'est de ce point que part une demi-droite[44] infranchissable tant que l'on s'interdit de provoquer des discontinuités dans la fonction considérée. On peut voir une coupure comme un ensemble dense de singularités[45].

Le choix de la coupure est conventionnel, mais, une fois fait, il faut s'y tenir pour éviter les ambiguïtés – qui conduisent tôt ou tard à des âneries –, et c'est seulement à ce moment que la branche considérée est parfaitement définie. Par exemple, pour la fonction $z^{\frac{1}{2}}$, on peut définir une première détermination comme :

$$f_1^{(1)}(z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \ , \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \ , \tag{3.111}$$

où $\sqrt{r}$ désigne la racine carrée positive "ordinaire" d'un nombre réel positif ou nul ($\sqrt{9} = 3$, *etc*). Sur l'axe réel positif, $z = x \in \mathbb{R}_+$ et $f_1^{(1)}(x) = \sqrt{x}$. Sur l'axe réel négatif, on a $f_1^{(1)}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}) = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}\sqrt{r}$. Enfin, juste au-dessous de l'axe réel positif, $f_1^{(1)}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-0)}) = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-0)} = -\sqrt{r}$. On retrouve bien le fait crucial qu'ayant fait un tour continu complet autour de l'origine, la fonction ne reprend pas la même valeur : partant de $\sqrt{r}$, elle vaut $-\sqrt{r}$ quand on revient au "même" point de l'axe réel (ce n'est pas tout à fait le même). À cette branche est naturellement associée la seconde branche de la racine carrée complexe[46] $f_1^{(2)}(z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\pi} = -f_1^{(1)}(z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.

On peut tout autant définir une autre branche, par exemple :

$$f_2^{(1)}(z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \ , \qquad -\pi \leq \theta < \pi \ . \tag{3.112}$$

Une telle fonction est maintenant continue à la traversée de l'axe réel, et le saut se produit de part et d'autre du demi-axe $\mathbb{R}_-$, qui constitue la coupure de la fonction ainsi proprement définie.

Quoi qu'il en soit, la coupure étant choisie une fois pour toutes, la branche de la fonction $z^{\frac{1}{2}}$ choisie est clairement analytique en-dehors de la coupure et tout ce qui a été démontré pour les fonctions analytiques reste donc valable. En particulier, l'intégrale sur une ligne évitant la coupure ne dépend que des extrémités, en aucune façon du chemin effectivement suivi pour les relier, l'intégrale sur un cycle est nulle, *etc.* Ceci est évidemment vrai pour n'importe quelle fonction multiforme.

L'obstacle présenté par la coupure est infranchissable tant que l'on en reste au plan complexe ordinaire considéré jusqu'ici. Pour cette raison, on ne peut pas décrire des cycles entourant le point de branchement

[42] Si le chemin suivi ne contient pas l'origine en son intérieur, l'argument de z part de zéro, augmente, puis diminue et revient à zéro à l'arrivée : alors la branche choisie reprend la même valeur.

[43] Le signe dépend du sens de parcours, positif ou négatif.

[44] En réalité l'aspect demi-*droite* est tout à fait secondaire : on pourrait prendre comme coupure n'importe quelle "demi-courbe" partant du point de branchement. Tout ceci n'est qu'affaire de commodité et autant faire simple en prenant une (demi-)ligne droite !

[45] On note que la coupure peut toujours être contournée, au contraire de la frontière *essentielle* d'une fonction analytique complète.

[46] C'est la généralisation à $\mathbb{C}$ du fait que l'équation $x^2 = a > 0$ a *deux* racines $\pm\sqrt{a}$.

sans buter sur une discontinuité de la fonction : en l'état actuel des choses, le théorème de Cauchy n'est pas applicable, et ses conséquences (notamment le théorème des résidus) sont inutilisables.

L'astuce géniale de Riemann consiste à *feuilleter* ce plan en l'imaginant comme étant en réalité le collage de feuillets plans, en nombre à préciser dans chaque cas (c'est-à-dire pour chaque fonction multiforme), de telle sorte que l'on soit autorisé à franchir la coupure (par au-dessus ou par au-dessous, c'est une affaire de goût) à la condition expresse de *changer de feuillet* et de prolonger par continuité la fonction dans le nouveau feuillet. Pour pouvoir se livrer à cette gymnastique, il suffit en définitive de séparer les feuillets les uns des autres en les maintenant collés exclusivement le long de la coupure. L'empilement de plans ainsi constitué forme la *surface de Riemann* de la fonction multiforme considérée ; sur sa surface de Riemann, une fonction multiforme peut être traitée comme une fonction analytique "ordinaire", et le théorème des résidus retrouve sa pleine et entière utilité.

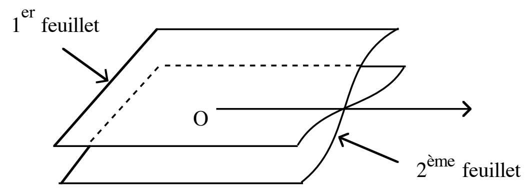

Figure 3.6: Surface de Riemann de la détermination de $z^{\frac{1}{2}}$ valant 1 en $z = 1$.

À titre d'exemple, reprenons la fonction $z^{\frac{1}{2}}$ et sa détermination (3.111), dont la coupure est le demi-axe $\mathbb{R}_+$. Les feuillets de sa surface sont donc collés les uns aux autres par la coupure, qui est la ligne de passage obligé d'un feuillet à l'autre. Le premier feuillet correspond tout naturellement aux valeurs de θ comprises entre 0 et 2π et, quand θ dépasse cette dernière valeur, le point d'affixe z glisse dans le deuxième feuillet (on dit souvent "descend dans le deuxième feuillet", mais *monter* ou *descendre* est purement conventionnel), tandis que son argument augmente par continuité au-delà de 2π. Par ce feuilletage, la fonction devient continue. Le point essentiel est que, sur sa surface de Riemann, la fonction devient *uniforme* et, toute autre singularité éventuelle mise à part, devient une fonction analytique.

Dans le deuxième feuillet, l'angle varie de 2π à 4π, atteignant cette valeur en revenant sur la coupure après avoir contourné l'origine une seconde fois. À ce moment, la détermination (3.111) vaut $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+4\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$, donc reprend la même valeur qu'au départ, en $\theta = 0$: sans créer de discontinuité, on peut remonter dans le premier feuillet. La surface de Riemann de (3.111) est donc formée de deux feuillets reliés par $\mathbb{R}_+$. On peut se la représenter comme deux plans paralèlles pincés le long de cet axe (voir fig. 3.6).

Avec les mêmes arguments, on montre que la surface de Riemann de la fonction $z^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ contient n feuillets ; on descend du feuillet k au feuillet $k+1$ au droit de $\mathbb{R}_+$, remontant du $n^{\text{ème}}$ au premier au même endroit.

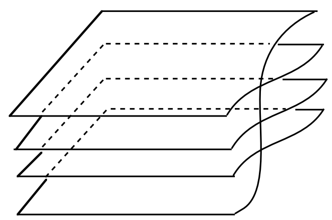

Figure 3.7: La surface de Riemann de la détermination de $z^{\frac{1}{n}}$ valant 1 en $z = 1$ possède n feuillets (la figure est faite avec $n = 4$).

Autre exemple : la fonction $(z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}$, $a \in \mathbb{R}_+$. Il est facile de voir qu'il y a deux points de branchement[47]

[47] là où s'annule la quantité sous le radical.

en $z = \pm a$, d'où partent deux coupures. Si l'une file[48] de $+a$ vers $+\infty \in \mathbb{R}$, l'autre de $-a$ vers $+\infty \in \mathbb{R}$, on constate qu'en fait ces deux coupures s'annihilent mutuellement à droite de a, puisqu'alors les deux monômes $(z \pm a)^{\frac{1}{2}}$ gagnent chacun un signe $-$ après un tour complet autour de l'origine. Ici, la coupure est donc le segment $[-a, +a]$ de l'axe réel, de part et d'autre de ce segment la fonction prend deux valeurs opposées. La surface de Riemann est donc simplement constituée de deux plans paralèles pincés le long du segment $[-a, +a]$. À nouveau, la(es) coupures peuvent être choisies autrement : on peut tout autant prendre[49] les deux demi-droites $]-\infty, -a]$ et $[+a, +\infty[$, auquel cas il n'y a pas une mais deux coupures (ou, si on préfère, la seule et unique coupure n'est apparemment pas connexe[50]). Cette fois, la fonction est alors continue à la traversée de $]-a, +a[$ et a des valeurs opposées de part et d'autre de chaque demi-droite $]-\infty, -a]$, $[+a, +\infty[$. Avec ce choix, la surface de Riemann est formée de deux plans pincés le long de ces deux demi-droites.

Une surface de Riemann peut contenir une infinité de feuillets : c'est le cas de la fonction logarithme, puisque sa partie imaginaire augmente de 2π à chaque tour : une fois le manège commencé, la fonction ln ne revient *jamais* à sa valeur initiale si on tourne toujours dans le même sens. Si la coupure est prise le long de $\mathbb{R}_+$, sa surface de Riemann est constituée d'une infinité de feuillets, sur lesquels on ne fait que descendre (ou de monter) quand on passe de l'un au suivant et si l'argument ne cesse de croître ou de décroître. Bien évidemment, il n'est pas interdit d'inverser le sens de rotation le long du chemin, après avoir été pêcher une singularité (c'est même en pratique l'un des intérêts principaux de cette gymnastique).

[48]Ce qui revient à prendre pour $(z \pm a)^{\frac{1}{2}}$ la même détermination qu'en (3.111) pour $z^{\frac{1}{2}}$.

[49]Ce qui revient à considérer la branche de $(z-a)^{\frac{1}{2}}$ dont la coupure est le demi-axe $[+a, +\infty[$, et pour $(z+a)^{\frac{1}{2}}$ la coupure suivant $[-\infty, -a]$.

[50]Elle l'est en fait par le point à l'infini.