Chapitre 2

Intégration des fonctions d'une variable complexe

Il s'agit ici de présenter quelques résultats fondamentaux sur l'intégration des fonctions d'une variable complexe.

2.1 Préliminaires

La notion d'intégrale de Riemann d'une fonction à valeurs réelles sur un domaine $I \subset \mathbb{R}$ de sa variable est supposée connue. Très schématiquement, pour une fonction $f(x)$ continue[1] dans l'intervalle $[a,\, b] \subset \mathbb{R}$, on définit une grille de points d'abscisses x_n dans l'intervalle $[a,\, b]$ ($x_0 = a$, $x_N = b$) et on considère les sommes du genre :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} f(\xi_n)(x_{n+1} - x_n) \ , \tag{2.1}$$

où $x_n \le \xi_n \le x_{n+1}$. Si la limite de S_N existe quand $N \to \infty$ et que $\sup |x_{n+1} - x_n|$ tend vers zéro, cette limite est appelée l'intégrale de f sur le segment $[a,\, b]$. Dans la notation usuelle, on écrit :

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{\sup |x_{n+1}-x_n| \to 0} S_N = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ . \tag{2.2}$$

Le symbole $\mathrm{d}x$ désigne une variation infiniment petite de la variable x autour d'une valeur x parcourant l'intervalle $[a,\, b]$. Dans ce cas, et de façon un peu pédante, on peut dire que le segment de droite d'extrémités a et b est un *chemin* allant de a à b.

C'est cette définition qu'il s'agit de généraliser au cas d'une fonction à valeurs complexes $f(z)$, z étant lui-même un complexe. La première notion à préciser est le chemin suivi dans le plan pour aller d'une borne à l'autre de l'intégrale, c'est-à-dire d'un point A à un point B du plan. Dans toute la suite, on ne considérera que des chemins parcourus dans un certain sens (orientés) et constitués d'arcs de courbe une fois continûment différentiables. Un tel chemin C, d'extrémités A et B fixées étant précisé, on le tronçonne en petits arcs délimités par des complexes z_n, $0 \le n \le N$ et on définit :

$$\mathcal{S}_N = \sum_{n=0}^{N-1} f(\xi_n)(z_{n+1} - z_n) \ , \tag{2.3}$$

[1] La généralisation à une fonction continue *par morceaux* est immédiate.

où ξ_n est un complexe situé sur C et appartenant au petit arc de courbe délimité par les points d'affixes z_n et z_{n+1}. On définit alors l'intégrale le long de C comme la limite :

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \lim_{N\to\infty}\;\lim_{\sup\,|z_{n+1}-z_n|\to 0} \mathcal{S}_N \;. \tag{2.4}$$

$\mathrm{d}z$ désigne une variation infinitésimale du nombre complexe z autour de la valeur z (associé à un arc de chemin infiniment petit – que l'on peut noter $\mathrm{d}C$ – dont les affixes sont z et $z+\mathrm{d}z$) ; ce sont tous les petits arcs $\mathrm{d}C$ qui, mis bout à bout, reconstituent le chemin C. La limite (2.4) existe si f est une fonction bornée continue[2]. En posant $f = u + \mathrm{i}v$, $z = x + \mathrm{i}y$ (et donc $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y$), on a :

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_C [u(x,\,y) + \mathrm{i}v(x,\,y)](\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y) \;=\; \int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x) \;. \tag{2.5}$$

Ainsi, l'intégrale d'une fonction complexe peut toujours s'exprimer à l'aide des deux intégrales réelles ci-dessus. De telles intégrales sont dites *curvilignes*, puisque les variables x et y peuvent toujours être interprétées comme les coordonnées cartésiennes d'un point M se déplaçant sur la courbe C.

Précisons la signification d'une intégrale curviligne. La courbe C a une équation cartésienne $\Phi(x,\,y) = 0$, mais il est toujours possible en principe d'en trouver une représentation paramétrique $(x(t),\,y(t))$ où[3] t est réel : quand t varie, le point d'affixe $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ décrit la courbe C du point A (quand $t = t_{\mathrm{A}}$) au point B (quand $t = t_{\mathrm{B}}$).

Par exemple, la droite du plan d'équation $y = a(x - x_0) + y_0$ admet la représentation paramétrique[4] $x = x_0 + t$, $y = at + y_0$, les points de cette droite ayant les affixes $z(t) = x_0 + t + \mathrm{i}(at + y_0) = x_0 + \mathrm{i}y_0 + (1 + \mathrm{i}a)t$. De même, le cercle centré en $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ et de rayon R est l'ensemble des points de coordonnées $x = x_0 + R\cos t$, $y = y_0 + R\sin t$, et l'affixe de chacun de ces points est le complexe $z(t) = z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Avec cette représentation, t a une signification très simple : c'est l'angle polaire du rayon joignant le centre du cercle au point de coordonnées $x(t)$, $y(t)$. Autre exemple : la courbe décrite par une mouche accrochée à une roue de bicyclette de rayon R qui roule sans glisser (cycloïde) a pour représentation paramétrique $x(t) = R(t - \sin t)$, $y(t) = R(1 - \cos t)$, si la mouche est "au départ" ($t = 0$) à l'origine. t désigne alors l'angle entre la verticale passant par le centre de la roue et le point où est agrippée la mouche endormie. L'affixe d'un point courant de la cycloïde est $z(t) = R(t + \mathrm{i}) - \mathrm{i}R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$.

Dès que l'on connaît une représentation paramétrique de C, une intégrale curviligne s'explicite aisément. Par exemple, en utilisant $\mathrm{d}x = x'(t)\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}y = y'(t)\mathrm{d}t$, la première intégrale de (2.5) s'écrit alors :

$$\int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) \;=\; \int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} \{u[x(t),\,y(t)]\,x'(t) - v[x(t),\,y(t)]\,y'(t)\}\;\mathrm{d}t \;\equiv\; \int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} \gamma(t)\,\mathrm{d}t \;, \tag{2.6}$$

où $\gamma(t)$ est une certaine fonction de t, bien déterminée ; il en va de même pour $\int_C (u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x)$. Au total, posant $z'(t) = x'(t) + \mathrm{i}y'(t)$, d'où $\mathrm{d}z = [x'(t) + \mathrm{i}y'(t)]\mathrm{d}t$, il vient :

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} f[z(t)]\,z'(t)\,\mathrm{d}t \;\equiv\; \int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} \Gamma(t)\,\mathrm{d}t \;, \tag{2.7}$$

où $\Gamma(t)$ est encore une autre fonction. En résumé, l'intégrale d'une fonction complexe sur sa variable complexe peut s'écrire des différentes façons :

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_C [u(x,\,y) + \mathrm{i}v(x,\,y)](\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y) \;=\; \int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x) \;=\; \int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} f[z(t)]\,z'(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.8}$$

La courbe C étant choisie, le calcul complet est en principe possible, en tout cas l'intégrale $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ est définie sans ambiguïté.

[2]Ceci reste vrai quand f est bornée et continue *par morceaux*.

[3]t est un nombre sans dimension, ce n'est pas le temps (lequel d'ailleurs ?) !

[4]C'est manifestement la représentation la plus simple, mais il en existe autant qu'on veut : on peut prendre $x = f(t) + x_0$ où f est une fonction uniforme croissante appliquant $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et alors $y = af(t) + y_0$. La représentation paramétrique d'une courbe dépend évidemment du choix de l'origine dans le plan.

Un contour qui ne se recoupe pas lui-même (pas de boucle) est appelé *arc de Jordan* ; en pareil cas, la fonction $z(t)$ est biunivoque : $t_1 \neq t_2 \Longleftrightarrow z(t_1) \neq z(t_2)$. La longueur $\mathrm{d}L$ d'un arc élémentaire est égale au module de la variation infinitésimale de de z soit $\mathrm{d}L = |\mathrm{d}z|$; une fois choisie une représentation paramétrique, on peut ainsi écrire $\mathrm{d}L = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,|\mathrm{d}t| = |z'(t)\,\mathrm{d}t|$. Pour un arc dont les extrémités sont définies par $t = \alpha$ et $t = \beta$ ($\alpha < \beta$), la longueur de l'arc est L :

$$L = \int_C |\mathrm{d}z| = \int_\alpha^\beta |z'(t)\,\mathrm{d}t| \ . \tag{2.9}$$

Pour finir, montrons que, avec les hypothèses admises, l'intégrale $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ existe. En effet, f étant bornée[5], et comme le module d'une somme est toujours inférieur ou égal à la somme des modules[6], on a :

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_C |f(z)\,\mathrm{d}z| = \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| \leq \int_C M|\mathrm{d}z| = ML \ . \tag{2.10}$$

Les propriétés habituelles des intégrales s'étendent immédiatement aux curvilignes et restent donc également vraies pour $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$:

1. linéarité de l'intégrand :

$$\int_C [af(z) + bg(z)]\,\mathrm{d}z = a\int_C f(z)\,\mathrm{d}z + b\int_C g(z)\,\mathrm{d}z \ , \tag{2.11}$$

   où a et b sont des constantes

2. additivité des chemins :

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{2.12}$$

3. si $-C$ désigne le contour C parcouru en sens inverse :

$$\int_{-C} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \tag{2.13}$$

Maintenant, des définitions de nature topologique doivent être données. La toute première notion est celle de *connexité*, qui est la possibilité de rejoindre deux points quelconques d'un ensemble de points en suivant un chemin ne sortant pas de cet ensemble. Plus précisément, soit dans $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ un contour fermé C ne se recoupant pas ; il délimite un domaine[7] dans le plan qui est dit, par définition, *simplement connexe* : toute courbe fermée dans ce domaine peut être contractée en un point en restant dans le domaine (on dit aussi : toute boucle est *homotope* à zéro). Le cercle est un exemple simple de domaine simplement connexe.

Soit maintenant deux domaines simplement connexes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ avec $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$. Le complémentaire de $\mathcal{D}_1$ dans $\mathcal{D}_2$ est tel que, deux points A et B y étant choisis, on peut distinguer deux sortes de chemins : ceux qui relient A à B en pénétrant dans $\mathcal{D}_1$, et ceux qui, contournant $\mathcal{D}_1$, ne sortent pas du complémentaire. Ce complémentaire est certes *connexe* (c'est d'ailleurs un domaine) puisqu'il existe des chemins allant d'un point à l'autre sans sortir du domaine, mais les chemins fermés ne sont pas tous homotopes à zéro : un tel domaine

[5] M existe toujours puisque f est supposée continue (éventuellement par morceaux) et définie sur le contour. La fonction $f[z(t)]$ est donc continue sur le fermé borné $t \in [a,\, b]$ et y possède toujours un maximum, c'est précisément M.

[6] L'intégrale est la limite d'une somme, et c'est en vertu de ceci que $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_C |f(z)\,\mathrm{d}z|$.

[7] En langage élémentaire, un *domaine* est un ensemble de points tel que :

1. autour de tout point on peut trouver un cercle contenu dans le domaine
2. deux points du domaine peuvent être reliés par un chemin situé tout entier dans ce domaine.

   Suivant cette dédinition, tout domaine est connexe, la différenciation ci-dessus ne portant que sur *simplement* ou *multiplement* connexe.

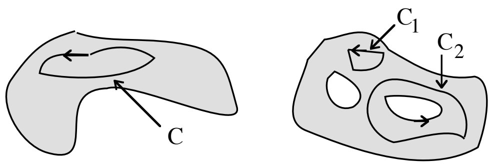

Figure 2.1: Les domaines grisés sont respectivement simplement connexe (à gauche), multiplement connexe (à droite). Les contours C et C_1 sont homotopes à zéro, C_2 ne l'est pas.

est dit *multiplement connexe* pour bien le démarquer d'un domaine simplement connexe. On verra bientôt l'importance d'une telle différenciation. Un exemple simple de domaine multiplement connexe est le domaine situé entre deux cercles de même centre (usuellement appelé *couronne*).

Géométriquement, un domaine simplement connexe ne contient aucun trou, un domaine multiplement connexe contient un ou plusieurs trous.

2.2 Théorème de Cauchy

Une fonction f étant choisie, l'intégrale $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ dépend en général du chemin[8] C. La question que l'on se pose maintenant est la suivante : existe-t-il une classe de fonctions remarquables telles que, les extrémités A et B de C étant fixées, l'intégrale d'une fonction donnée prend la *même* valeur pour *tous* les chemins reliant A à B ?

Le théorème de Cauchy répond à cette question : cette classe est l'ensemble des fonctions holomorphes. D'une importance capitale, ce théorème est la clé de voûte de l'intégration dans le plan complexe. Il est dû à Cauchy (1825) et s'énonce précisément comme suit :

Si $f(z)$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe $\mathcal{D}$, l'intégrale $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ prend la même valeur pour tous les chemins C inclus dans $\mathcal{D}$ et ayant les mêmes extrémités.

Pour démontrer ce théorème de façon élémentaire, on ajoute l'hypothèse que $f'(z)$ est *continue* (alors que le caractère holomorphe assure seulement *l'existence* de la dérivée). Avec $f = u + \mathrm{i}v$, l'intégrale de f le long de C est :

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x) \ . \tag{2.14}$$

D'un autre côté, soit l'intégrale curviligne :

$$\int_\Gamma (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) \ , \tag{2.15}$$

où Γ est un contour dans le plan $\mathbb{R}^2$ reliant deux points fixes A et B, et où $P(x,\,y)$ et $Q(x,\,y)$ sont des fonctions données. On sait que l'intégrale curviligne ne dépend pas du chemin suivi si l'intégrand est une différentielle totale, c'est-à-dire s'il existe une fonction[9] $\Phi(x,\,y)$ telle que $\mathrm{d}\Phi = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$. Pour que la forme linéaire

[8] Tout comme le travail d'une force $\vec{F}$ ne dérivant pas d'un potentiel, $W_C = \int_C \vec{F}.\mathrm{d}\vec{l}$, dépend du chemin suivi dans l'espace par le point d'application de la force. Pour un champ de forces à deux dimensions (dans $\mathbb{R}^2$), s'il existe une fonction $U(x,\,y)$ telle que $F_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial \alpha}$, alors W_C ne dépend que des extrémités de C. Le contexte permet alors d'affirmer que F_x et $-F_y$ peuvent être considérées comme les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe $\mathcal{F}(z) = F_x(x,\,y) - \mathrm{i}F_y(x,\,y)$; alors, le travail est la partie réelle de $\int_C \mathcal{F}(z)\,\mathrm{d}z$ (tout ceci suppose que U est une fonction continue à dérivées continues).

[9] En Thermodynamique, c'est une fonction d'état, c'est-à-dire une fonction qui ne dépend que des variables thermodynamiques (d'équilibre) des états initial et final.

différentielle $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ soit une différentielle *totale*, P (*resp.* Q) doit être la dérivée partielle de Φ par rapport à x (*resp.* y) ; ainsi, il faut d'une part que la fonction Φ existe[10] (nécessairement !), d'autre part que l'on ait précisément :

$$P(x,\,y) \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,\,y) \;\;, \qquad Q(x,\,y) \;=\; \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,\,y) \;\;. \tag{2.16}$$

Dans ces conditions, l'intégrale (2.14) est simplement égale à $\Phi(B) - \Phi(A)$, *différence* des valeurs de Φ aux extrémités fixées, et donc indépendante[11] du chemin suivi pour relier l'une à l'autre.

Maintenant, un théorème classique d'Analyse établit que si une fonction $\Phi(x,\,y)$ et ses dérivées[12] Φ'_x, Φ'_y, Φ''_{xy} et Φ''_{yx} sont définies et continues en un point, alors les dérivées croisées sont égales :

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \;=\; \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial x} \;\;. \tag{2.18}$$

Autrement dit, pour une fonction continue à dérivées continues[13], peu importe l'ordre dans lequel on effectue les deux dérivations d'ordre 2. Ceci étant, partant de la condition (2.16) assurant que $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ est une différentielle totale, et utilisant (2.18), on trouve :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \;=\; \frac{\partial P}{\partial y} \;\;. \tag{2.19}$$

Revenant à (2.14), on veut que l'intégrale ne dépende pas du chemin suivi, une condition qui se reporte séparément et indépendamment sur la partie réelle et sur la partie imaginaire de l'intégrale (2.14). Pour la partie réelle, la quantité $u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y$ doit être une différentielle totale ; (2.19) avec $P = u$ et $Q = -v$ donne :

$$-\frac{\partial v}{\partial x} \;=\; \frac{\partial u}{\partial y} \;\;. \tag{2.20}$$

De même pour la partie imaginaire $u\mathrm{d}y + v\mathrm{d}x$, avec $Q = u$ et $P = v$ (2.19) donne :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; \frac{\partial v}{\partial y} \;\;. \tag{2.21}$$

Les deux conditions (2.20) et (2.21) ne sont rien d'autre que les conditions de Cauchy, qui définissent une fonction holomorphe. Le théorème de Cauchy est ainsi démontré.

Il en résulte qu'une intégrale le long d'un certain contour peut aussi être notée $\int_{z_\mathrm{A}}^{z_\mathrm{B}} f(z)\mathrm{d}z$, où z_A et z_B sont les affixes des extrémités A et B du chemin (seules les extrémités sont à préciser puisque l'intégrale ne dépend pas du chemin choisi pour aller de l'une à l'autre). On pourra retenir l'image suivante : finalement, pour une fonction holomorphe dans $\mathcal{D}$, le chemin est un élastique fixé par deux punaises dans le plan, déformable à souhait (mais en restant toujours dans $\mathcal{D}$) sans pour autant que les déformations de l'élastique modifient la valeur de l'intégrale.

Traitons un exemple trivial illustrant le théorème de Cauchy. Soit la fonction $f(z) = z^2$, qui est holomorphe dans le plan entier, et calculons son intégrale le long de plusieurs chemins reliant l'origine au point D de coordonnées $(a,\,b)$ (voir fig. 2.2). Tout d'abord on a :

$$\int z^2\,\mathrm{d}z \;=\; \int (x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y) \;=\; \int [(x^2 - y^2)\mathrm{d}x - 2xy\mathrm{d}y] + \mathrm{i}\int [(x^2 - y^2)\mathrm{d}y + 2xy\mathrm{d}x] \;\;. \tag{2.22}$$

[10] En Thermodynamique, c'est l'affirmation de l'*existence* de l'énergie en tant que *fonction* des grandeurs d'état qui constitue la signification du Premier principe. La banalité des mots occulte souvent la profondeur d'une telle affirmation.

[11] C'est bien ce qui caractérise une différentielle totale, combinaison linéaire d'accroissement infinitésimaux dont les coefficients sont les dérivées partielles d'une certaine fonction des variables. La somme de toutes les petites différences $\delta\Phi = \Phi(M_{i+1}) - \Phi(M_i)$ se simplifie (A=M_0, B=M_N) :

$$\sum \delta\Phi \;=\; \sum_{i=0}^{N-1} \Phi(M_{i+1}) - \Phi(M_i) \;=\; \Phi(M_1) - \Phi(M_0) + \Phi(M_2) - \Phi(M_1) + \ldots + \Phi(M_N) - \Phi(M_{N-1}) \;=\; \Phi(B) - \Phi(A) \;\;. \tag{2.17}$$

[12] $\Phi'_x \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x}$, *etc.*

[13] C'est ici qu'intervient l'hypothèse de continuité sur $f(z)$ faite au début, puisque u et v vont jouer des rôles analogues à ceux de P et Q, et que la dérivée $f'(z)$ s'exprime de quatre façons à l'aide de u'_x, v'_y, ... (voir Ch. 1).

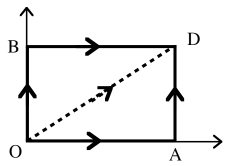

Figure 2.2: Contours utilisés pour le calcul de $\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{D}} z^2 \mathrm{d}z$.

Prenons en premier le contour OAD. Le long de OA, on a $\mathrm{d}y = 0$ et $y = 0$, de sorte que :

$$\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} z^2 \,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^a x^2 \mathrm{d}x \;=\; \frac{a^3}{3} \quad . \tag{2.23}$$

Le long de AD, on a $x = a$ et $\mathrm{d}x = 0$:

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{D}} z^2 \,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^b -2ay\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_0^b (a^2 - y^2)\mathrm{d}y \;=\; -ab^2 + \mathrm{i}(a^2 b - \frac{b^3}{3}) \quad . \tag{2.24}$$

Au total :

$$\int_{\mathrm{OAD}} z^2 \,\mathrm{d}z \;=\; \frac{a^3}{3} - ab^2 + \mathrm{i}(a^2 b - \frac{b^3}{3}) \quad . \tag{2.25}$$

De la même façon, on trouve facilement :

$$\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{B}} z^2 \,\mathrm{d}z \;=\; \mathrm{i}\int_0^b -y^2 \mathrm{d}y \;=\; -\mathrm{i}\frac{b^3}{3} \quad , \tag{2.26}$$

$$\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{D}} z^2 \,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^a (x^2 - b^2)\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_0^a 2bx\mathrm{d}x \;=\; \frac{a^3}{3} - ab^2 + \mathrm{i}ba^2 \quad . \tag{2.27}$$

Au total, la somme des seconds membres de (2.26) et (2.27) redonne bien (2.25). Maintenant, le long de la diagonale OD du rectangle, on a $y = \frac{b}{a}x$ et $\mathrm{d}y = \frac{b}{a}\mathrm{d}x$, de sorte que :

$$\int_{\mathrm{diagonale}} z^2 \,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^a [(x^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2)\mathrm{d}x - 2\frac{b^2}{a^2}x^2\mathrm{d}x] + \mathrm{i}\int_0^a \,[(x^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2)\frac{b}{a}\mathrm{d}x + 2\frac{b}{a}x^2\mathrm{d}x] \quad . \tag{2.28}$$

Tous calculs faits, on retrouve encore (2.25). Enfin, l'intégrale $\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{D}} z^2 \,\mathrm{d}z$ peut (c'est le plus simple !) être calculée en obtenant la variation d'une primitive[14] entre O et D :

$$\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{D}} z^2 \,\mathrm{d}z \;=\; \left|\frac{z^3}{3}\right|_{\mathrm{O}}^{\mathrm{D}} \;=\; \frac{1}{3}(a + \mathrm{i}b)^3 - 0^3 \;=\; \frac{1}{3}(a^3 + 3\mathrm{i}a^2 b - 3ab^2 - \mathrm{i}b^3) \quad , \tag{2.29}$$

qui donne bien toujours le même résultat.

Une première conséquence immédiate du théorème de Cauchy est la suivante :

Si une fonction $f(z)$ est holomorphe[15] dans un domaine simplement connexe $\mathcal{D}$, son intégrale $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ pour tout cycle C situé dans $\mathcal{D}$ est nulle :

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0 \quad . \tag{2.30}$$

[14] voir la définition précise plus bas, mais elle n'est qu'une généralisation de la primitive au sens usuel.

[15] Rappelons qu'en raison de l'équivalence entre holomorphie et analyticité, on peut remplacer holomorphe par analytique et inversement.

En effet, soit deux contours C_1 et C_2 distincts mais ayant les mêmes extrémités A et B. D'après le théorème de Cauchy, on a :

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z \ . \tag{2.31}$$

À l'aide de ces deux contours, on peut faire un cycle C formé par la réunion de C_1 parcouru de A à B, et de C_2 parcouru de B à A, ce que l'on a déjà noté $-C_2$. L'intégrale le long du cycle C est la somme :

$$\int_{\text{cycle}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{-C_2} f(z)\,\mathrm{d}z \ , \tag{2.32}$$

mais $\int_{-C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$, de sorte que :

$$\int_{\text{cycle}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z \ . \tag{2.33}$$

D'après (2.31), les deux intégrales au second membre sont égales, d'où le résultat exprimé par (2.30). Cette égalité peut d'ailleurs être presque considérée comme une formulation alternative du théorème de Cauchy, tant elle en est une immédiate conséquence.

L'articulation des idées essentielles est la suivante. Pour un domaine simplement connexe, *tout* chemin fermé peut être réduit à un point par déformation continue (tout chemin est homotope à zéro) ; la valeur de l'intégrale est indépendante du cycle, or l'intégrale sur un cycle réduit à un point est visiblement nulle (la fonction est bornée et le chemin est de longueur nulle !). Au total, l'intégrale sur tout cycle est nulle.

Par ailleurs, quand la fonction $f(z)$ est continue jusque sur la frontière de son domaine d'analycité, le résultat (2.30) reste vrai quand le cycle C est précisément cette frontière : grâce à la continuité, l'intégrale le long de la frontière est égale à l'intégrale le long de tout cycle intérieur infiniment proche – pour lequel (2.30) est vrai.

Citons une autre conséquence du théorème de Cauchy, qui permet de définir précisément la primitive d'une fonction holomorphe :

Si une fonction $f(z)$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe $\mathcal{D}$, alors l'intégrale :

$$\int_{z_0}^{z} f(z')\,\mathrm{d}z' \tag{2.34}$$

considérée comme fonction de sa borne supérieure est une fonction holomorphe dans $\mathcal{D}$, et de plus :

$$F'(z) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z} f(z')\,\mathrm{d}z' = f(z) \ . \tag{2.35}$$

En effet, par la définition de la dérivée, on a :

$$F'(z) = \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{\xi}[F(z+\xi)-F(z)] = \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{\xi}\left[\int_{z_0}^{z+\xi} f(z')\mathrm{d}z' - \int_{z_0}^{z} f(z')\mathrm{d}z'\right] = \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{\xi}\int_{z}^{z+\xi} f(z')\mathrm{d}z' \ . \tag{2.36}$$

En posant $z' = z + \xi'$, la dernière intégrale est $\int_0^{\xi} f(z+\xi')\mathrm{d}\xi'$, d'où :

$$F'(z) = \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi} f(z+\xi')\mathrm{d}\xi' \ . \tag{2.37}$$

Comme f est holomorphe, c'est aussi une fonction continue[16], donc $f(z+\xi) = f(z) + \eta(z,\,\xi)$ où la fonction $\eta(z,\,\xi)$ tend vers zéro avec ξ :

$$f(z+\xi') = f(z) + \eta(z,\,\xi') \ , \qquad \lim_{\xi'\to 0}\eta(z,\,\xi') = 0 \ ; \tag{2.38}$$

[16] L'existence de la dérivée en un point assure la continuité en ce point.

d'où :

$$F'(z) \;=\; \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi}[f(z)+\eta(z,\,\xi')]\,\mathrm{d}\xi' \;=\; f(z)+\lim_{\xi\to 0}\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi}\eta(z,\,\xi')\,\mathrm{d}\xi' \;\; ; \tag{2.39}$$

l'intégrale est bornée par[17] Max $\eta\times|\xi|$, qui donne zéro à la limite. La limite $F'(z)$ existe, F est donc holomorphe, et sa dérivée est bien $f(z)$. Comme en Analyse réelle, une fonction telle que F, dont la dérivée F' est égale à f, est appelée *primitive* de f.

La notion de primitive étant généralisée, il est possible d'énoncer les importants résultats suivants :

1. deux primitives F_1 et F_2 d'une même fonction f diffèrent d'une constante :

$$F_2(z)-F_1(z) \;=\; \text{constante} \;\; . \tag{2.40}$$

En effet, soit la différence $\Phi(z)=F_2(z)-F_1(z)\equiv U(x,\,y)+\mathrm{i}V(x,\,y)$. D'après (2.35) $F_1'(z)=f(z)=F_2'(z)$, d'où :

$$\Phi'(z) \;=\; 0 \;\; . \tag{2.41}$$

Par ailleurs, on a vu au chapitre précédent quatre façons d'écrire la dérivée d'une fonction holomorphe, et notamment :

$$\Phi'(z) \;=\; \frac{\partial U}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial V}{\partial x} \;=\; \frac{\partial V}{\partial y}-\mathrm{i}\,\frac{\partial U}{\partial y} \;\; . \tag{2.42}$$

Compte tenu de (2.41), il vient :

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial V}{\partial x} \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial y}-\mathrm{i}\,\frac{\partial U}{\partial y} \;=\; 0 \;\; , \tag{2.43}$$

soit :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \;=\; 0 \;\; , \qquad \frac{\partial U}{\partial y} \;=\; 0 \;\; , \qquad \frac{\partial V}{\partial x} \;=\; 0 \;\; , \qquad \frac{\partial V}{\partial y} \;=\; 0 \;\; , \tag{2.44}$$

d'où l'on conclut que les fonctions U et V sont constantes.

2. si $F(z)$ est une primitive quelconque d'une fonction holomorphe $f(z)$, alors l'intégrale entre deux points n'est autre que la variation de cette primitive :

$$\int_{z_0}^{z} f(z')\mathrm{d}z' \;=\; F(z)-F(z_0) \;\; , \tag{2.45}$$

tout comme l'intégrale curviligne de la différentielle d'une fonction est égale à la variation de cette fonction entre les deux extrémités. En effet, soit $F_{z_0}(z)$ la primitive nulle quand $z=z_0$:

$$F_{z_0}(z) \;=\; \int_{z_0}^{z} f(z')\mathrm{d}z' \;\; , \qquad F_{z_0}(z_0) \;=\; 0 \;\; . \tag{2.46}$$

Soit $F(z)$ une primitive *quelconque* de f. D'après (2.40), $F(z)$ et $F_{z_0}(z)$ diffèrent d'une constante, K :

$$F(z) \;\equiv\; \int_{z_0}^{z} f(z')\mathrm{d}z' \;=\; F_{z_0}(z)+K \;\; ; \tag{2.47}$$

en faisant $z=z_0$, l'intégrale est nulle, d'où $K=-F(z_0)$ et, par report dans (2.47), la relation (2.45). Comme toujours, la constante additive arbitraire incluse dans la définition de $F(z)$ disparaît dans la différence au second membre de (2.45).

Il est maintenant possible d'établir la réciproque du théorème de Cauchy, appelée théorème de Morera, qui s'énonce comme suit :

[17] Rien n'interdit, pour aller de z à $z+\xi$, de suivre le petit segment de droite entre z et $z+\xi$, dont la longueur est précisément $|\xi|$.

Si une fonction $f(z)$ est continue[18] *dans un domaine simplement connexe $\mathcal{D}$ et si l'intégrale $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ pour tout cycle C situé dans $\mathcal{D}$ est nulle, alors $f(z)$ est holomorphe dans ce domaine.*

En effet, décomposons le cycle C en deux chemins distincts, C_1 allant d'un point A à un point B, l'autre C_2 allant de B à A. Par hypothèse, les intégrales le long de C_1 et de $-C_2$ sont égales. La fonction étant supposée continue partout dans $\mathcal{D}$, cette opération peut être faite pour n'importe quel cycle, d'où l'on déduit que, pour *tous* les chemins dans $\mathcal{D}$, l'intégrale ne dépend que des extrémités. Il en résulte d'après ci-dessus que, z_0 étant fixé, la relation :

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad (2.48)$$

définit une fonction F ayant une dérivée $F'(z)$, c'est-à-dire qu'elle est holomorphe dans $\mathcal{D}$. F', en tant que dérivée d'une fonction holomorphe, est aussi une fonction holomorphe ; mais F' n'est autre que f, ce qui démontre le théorème de Morera.

2.3 Généralisation au cas d'un domaine multiplement connexe

Quand la fonction n'est holomorphe que dans un domaine *multiplement* connexe, le théorème de Cauchy n'est pas toujours vrai. En pareil cas, il est en effet possible de trouver des contours ne donnant pas toujours la même valeur pour l'intégrale[19].

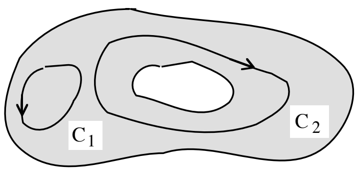

Figure 2.3: Le contour C_1 est homotope à zéro, C_2 ne l'est pas. Le théorème de Cauchy s'applique à tous les contours du type C_1, mais pas à ceux de la classe C_2.

Le plus simple est de s'en convaincre sur un exemple[20]. Soit la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$, qui est holomorphe dans le plan privé de l'origine $\mathbb{C}^* \equiv \mathbb{C}\backslash\{0\}$, elle est donc holomorphe dans un domaine délimité par deux contours fermés autour de l'origine ne se recoupant pas, que l'on peut toujours prendre comme deux cercles centrés en O et de rayons r et R ($r < R$) – délimitant une *couronne*, l'exemple même de domaine multiplement connexe.

Comme premier contour, prenons le demi-cercle supérieur C_+ de rayon ρ ($r < \rho < R$) parcouru dans le sens positif, qui donne la même valeur à l'intégrale que tout contour C'_+ de mêmes extrémités et situé dans la demi-couronne supérieure (voir fig. 2.4), puisqu'ils peuvent être superposés par une déformation continue les laissant tout entiers dans le domaine d'analycité. Le cercle de rayon ρ est décrit par le point dont l'affixe est :

$$z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad , \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \;; \qquad (2.49)$$

ici, c'est θ qui est le paramètre au cœur des équations paramétrisant le cercle : $x(\theta) = \rho\cos\theta$, $y(\theta) = \rho\sin\theta$.

Pour le demi-cercle supérieur, θ varie de 0 à π de sorte que l'intégrale le long de C'_+, égale à celle le long de C_+, s'écrit :

$$\int_{C'_+} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_{C_+} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} \frac{1}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \int_0^{\pi} \frac{1}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{i}\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta = \mathrm{i}\pi \;. \qquad (2.50)$$

[18] Il faut bien que la fonction soit continue : z^{-n}, avec n entier et $n \geq 2$ satisfait bien (2.48) mais n'est pas continue dans $\mathcal{D}$.
[19] Le théorème reste évidemment vrai pour tous les contours homotopes à zéro situés dans un domaine multiplement connexe.
[20] Un seul contre-exemple suffit !

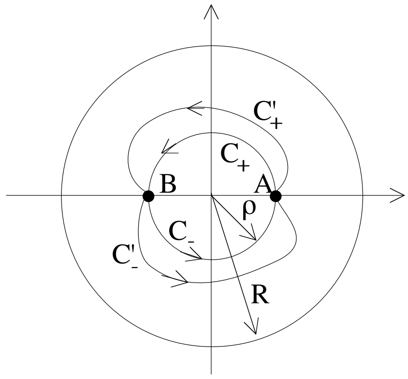

Figure 2.4: Pour la fonction $\frac{1}{z}$, les intégrales le long des contours C_+ (resp. C_-) et C'_+ (resp. C'_-) sont égales, celles le long de C_+ et C_- sont différentes.

Prenons maintenant des contours dans la demi-couronne inférieure, C'_- et le demi-cercle inférieur C_-, ayant toujours les mêmes extrémités mais forcément décrits dans le sens *négatif*, afin que A reste le point de départ et B celui d'arrivée ; maintenant, θ varie de 0 à $-\pi$:

$$\int_{C'_-} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \,=\, \int_{C_-} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \,=\, \int_0^{-\pi} \frac{1}{\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}(\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \,=\, \int_0^{-\pi} \frac{1}{\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{i}\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \,=\, \mathrm{i}\int_0^{-\pi}\mathrm{d}\theta \,=\, -\mathrm{i}\pi \ . \tag{2.51}$$

Ainsi, pour les deux contours ayant pourtant les mêmes extrémités, l'intégrale prend deux valeurs différentes. En particulier, l'intégrale sur le cycle $C_+ \cup (-C_-)$ *n'est pas nulle* et vaut $\mathrm{i}\pi - (-\mathrm{i}\pi) = 2\mathrm{i}\pi$; en désignant par C le cercle de rayon ρ (quelconque) centré à l'origine, on a donc le résultat très important :

$$\int_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \,=\, 2\mathrm{i}\pi \ . \tag{2.52}$$

Il est bien clair que, si l'intégrale n'est pas nulle, c'est parce que le contour ne peut être réduit à un point tout en restant dans le domaine d'analycité de la fonction $\frac{1}{z} \equiv z^{-1}$.

D'après le théorème de Cauchy, ce résultat reste vrai pour tout contour fermé entourant l'origine et parcouru dans le sens positif. D'où le résultat fondamental[21] :

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \,=\, 2\mathrm{i}\pi \ , \tag{2.54}$$

où Γ est *n'importe quel contour fermé entourant une fois et une seule* [22] *l'origine et décrit dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.*

L'idée essentielle à retenir est donc celle-ci : le domaine d'analycité $\mathcal{D}$ étant précisé et les extrémités du chemin étant fixes (et situées dans $\mathcal{D}$!), ce dernier peut être déformé continûment *ad libitum* à condition de rester tout entier dans $\mathcal{D}$. Il est manifeste que dans l'exemple ci-dessus, le demi-cercle inférieur ne peut pas être superposé au demi-cercle supérieur par une déformation continue qui le laisse dans la couronne comprise entre les deux cercles de rayon r et R. Le point capital est la notion de déformation *continue* du contour dans le plan en le laissant tout entier dans une partie connexe, une opération dont le sens intuitif est clair et se passe de toute définition précise. Autrement dit, toutes les déformations de l'élastique le laissant en contact avec le plan (les frontières des parties connexes étant des murs infranchissables), laissent invariante la valeur de l'intégrale : dans l'exemple ci-dessus, il ne faut pas le faire "décoller" pour lui permettre de sauter par dessus l'origine.

[21] Clairement, ceci se généralise immédiatement en :

$$\int_{\Gamma_{z_0}} \frac{1}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \,=\, 2\mathrm{i}\pi \ , \tag{2.53}$$

où Γ_{z_0} est une boucle autour de z_0.

[22] D'après le calcul précédent, il est bien évident que si on tourne deux fois, on trouve $4\mathrm{i}\pi$, *etc.*

On se convaincra peu à peu que le calcul intégral avec des fonctions holomorphes est essentiellemnt un *jeu de l'élastique* d'un genre particulier.

Les mêmes raisons font que la notion de primitive s'étend également au cas d'un domaine non simplement connexe (voir l'exemple du logarithme, traité dans la sous-section 2.6.2).

2.4 Formule de Cauchy

La formule de Cauchy est, avec le théorème de Cauchy, l'un des résultats majeurs de ce chapitre. Elle s'énonce comme suit :

Soit une fonction $f(z)$ holomorphe dans un domaine simplement connexe $\mathcal{D}$. Alors $\forall\, z \in \mathcal{D}$, on a :

$$f(z) \,=\, \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \tag{2.55}$$

où C est un chemin contenu dans $\mathcal{D}$ et tournant une fois autour de z dans le sens positif[23].

Pour démontrer cette formule, considérons la fonction $g(\xi)$ définie comme :

$$g(\xi) \,=\, \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \quad \text{si } \xi \neq z \ , \qquad g(\xi) \,=\, f'(\xi) \quad \text{si } \xi = z \tag{2.56}$$

$g(\xi)$ est holomorphe dans $\mathcal{D}$ au même titre que f. D'après le théorème de Cauchy, on a donc :

$$\int_C g(\xi)\,\mathrm{d}\xi \,=\, 0 \ , \tag{2.57}$$

où le contour C est dans $\mathcal{D}$. Par la définition (2.56), il vient :

$$\int_C \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \,=\, 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \,=\, \int_C \frac{f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \ . \tag{2.58}$$

Pour calculer l'intégrale au second membre[24], déformons continûment le contour C pour le transformer en un cercle γ_r de centre z et de rayon r. Sur ce cercle, on a $\xi = z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\mathrm{d}z = \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$, l'angle θ variant dans un intervalle d'amplitude 2π ; alors, la deuxième forme de (2.58) se transforme successivement en :

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \,=\, \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \,=\, \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \,=\, \mathrm{i}f(z)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \,=\, 2\mathrm{i}\pi\, f(z) \ , \tag{2.59}$$

ce qui établit la formule de Cauchy (2.55). Cette formule est assez extraordinaire : elle montre que les valeurs de la fonction $f(z)$ dans son domaine d'analycité ne dépendent que de ses valeurs sur le contour C, qui peut d'ailleurs être la frontière de $\mathcal{D}$.

On verra que cette formule a de nombreuses conséquences très importantes. Une toute première est ce que l'on appelle *la formule de la moyenne*, qui s'exprime comme suit :

$$f(z) \,=\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta \ . \tag{2.60}$$

[23] En particulier, si f est continue sur la frontière Γ de $\mathcal{D}$, le contour C peut être la frontière du domaine.

[24] Ce petit calcul n'est pas à proprement nécessaire : il suffit en fait d'appliquer (2.53) pour voir immédiatement que l'intégrale en question vaut $2\mathrm{i}\pi f(z)$.

Pour établir cette formule, repartons de (2.55) et reprenons pour C le cercle γ_r de centre z et de rayon r, où $\xi - z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$; il vient :

$$f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(z+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(z+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta \ . \tag{2.61}$$

Comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est 2π-périodique, ce résultat reste vrai pour n'importe quel intervalle d'amplitude 2π ; θ_0 désignant un angle quelconque, on a donc tout autant :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} f(z+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta \ . \tag{2.62}$$

Le second membre de (2.61) est bien une *moyenne* : c'est la moyenne des valeurs de la fonction f sur le cercle de centre z, l'angle θ étant tiré au hasard uniformément[25] l'intervalle $[-\pi, +\pi[$. On obtient ainsi un résultat assez extraordinaire : la valeur de f au centre du cercle est la moyenne des valeurs sur le cercle, et ce quel qu'en soit le rayon[26] !

En écrivant les choses comme en théorie des probabilités, et désignant par $P(\theta)$ la densité de probabilité (ici uniforme, c'est-à-dire "plate"), on a :

$$\text{moyenne de } f(z+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \int_{-\pi}^{+\pi} P(\theta) f(z+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{2\pi} f(z+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta \ , \tag{2.63}$$

d'où une autre écriture de ce résultat :

$$f(z) = \langle f(z+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\rangle \ . \tag{2.64}$$

Comme toujours, une telle formule remarquable permet d'établir des résultats non triviaux. Par exemple, prenons $f(z) = \mathrm{e}^z$; alors (2.61) donne :

$$\mathrm{e}^z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta \iff \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\mathrm{e}^{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta = 1 \ ; \tag{2.65}$$

cette dernière égalité n'a rien d'évident à première vue[27], pas plus d'ailleurs que les deux égalités qui en découlent immédiatement en séparant les parties réelle et imaginaire.

2.5 Dérivées d'ordre supérieur

La propriété d'analycité d'une fonction $f(z)$ fait de celle-ci un objet très robuste, et a des conséquences innombrables, dont les plus importantes viennent d'être énoncées. Une autre propriété remarquable peut être énoncée comme suit[28, 29] :

Si une fonction $f(z)$ est holomorphe dans un domaine simplement connexe $\mathcal{D}$ et continue sur $\bar{\mathcal{D}}$, elle possède en chaque point de $\mathcal{D}$ des dérivées de tous les ordres ; la dérivée d'ordre n est donnée par la formule :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi \tag{2.66}$$

où Γ est la frontière[30] de $\mathcal{D}$.

[25] la densité de probabilité $P(\theta)$ est donc constante sur cet intervalle (c'est le propre d'un tirage *équiréparti*) ; la normalisation $\int_{-\pi}^{+\pi} P(\theta)\mathrm{d}\theta = 1$ donne immédiatement $P(\theta) = \frac{1}{2\pi}$.

[26] Il faut bien sûr que le cercle reste dans le domaine d'holomorphie de $f(z)$.

[27] Sauf si on développe l'intégrand en série, on invoque la convergence uniforme et on utilise le fait que $\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\delta_{n0}$.

[28] Pour se souvenir des détails de (2.66), penser à l'homogénéité, en imaginant que z n'est pas un nombre pur.

[29] $\bar{\mathcal{D}}$ désigne le domaine fermé formé par $\mathcal{D}$ et sa frontière C.

[30] Référence est faite à la frontière pour obtenir le résultat dans le domaine le plus vaste possible. Le même résultat vaut pour tout contour fermé C entourant le point d'affixe z, l'essentiel étant que C contienne z en son intérieur.

Prenons d'abord $n = 1$; par la définition de la dérivée :

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad ; \tag{2.67}$$

à l'aide de la formule de Cauchy, le second membre s'écrit successivement :

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma \left[\frac{f(\xi)}{\xi-(z+h)} - \frac{f(\xi)}{\xi - z}\right] \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\lim_{h\to 0}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)}\mathrm{d}\xi \ . \tag{2.68}$$

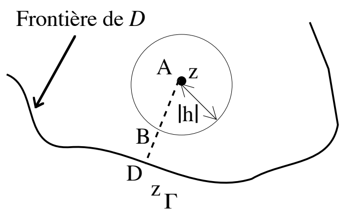

Figure 2.5: ξ_Γ est l'affixe de D, point de la frontière de $\mathcal{D}$ le plus proche du cercle de centr z et de rayon $|h|$.

Le terme $\frac{1}{\xi - z - h}$ tend uniformément vers $\frac{1}{\xi - z}$. En effet, z et $|h|$ étant fixés, $z + h$ décrit le cercle de centre z et de rayon $|h|$. Soit ξ_Γ l'affixe du point de la frontière le plus proche de ce cercle. Alors, pour tout point ξ de la frontière, on a $|\xi - z| \geq |\xi_\Gamma - z|$ et $|\xi - (z + h)| \geq |\xi_\Gamma - z| - |h|$. Il en résulte que :

$$\left|\frac{1}{\xi-(z+h)} - \frac{1}{\xi - z}\right| = \left|\frac{h}{[\xi-(z+h)](\xi-z)}\right| \leq \frac{h}{(|\xi_\Gamma - z| - |h|)\,|\xi_\Gamma - z|} \ . \tag{2.69}$$

Cette dernière quantité est une borne indépendante de ξ, et tend vers zéro avec h, ce qui établit la convergence uniforme en ξ de la quantité au premier membre. On peut donc prendre la limite sous l'intégrale, et il vient :

$$f'(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\mathrm{d}\xi \ , \tag{2.70}$$

établissant la formule annoncée pour $n = 1$.

Il suffit maintenant de raisonner par récurence avec $f^{(n)}$. Supposons que $f^{(n)}$ est donnée par l'expression (2.66) ; alors, par définition de la dérivée :

$$f^{(n+1)}(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f^{(n)}(z+h) - f^{(n)}(z)}{h} \ , \tag{2.71}$$

soit, par hypothèse :

$$f^{(n+1)}(z) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{n!}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma f(\xi)\left[\frac{1}{[\xi-(z+h)]^{n+1}} - \frac{1}{(\xi-z)^{n+1}}\right]\mathrm{d}\xi \ . \tag{2.72}$$

En réduisant au même dénominateur le grand crochet, et en utilisant la formule du binôme pour arranger le numérateur qui en résulte, il vient :

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{n!}{2\mathrm{i}\pi}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_\Gamma f(\xi)\frac{(n+1)h(\xi-z)^n + \mathcal{O}(h^2)}{(\xi - z - h)^{n+1}(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi = \frac{(n+1)!}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+2}}\mathrm{d}\xi \tag{2.73}$$

Ainsi, si la relation (2.66) est vraie pour n, elle l'est aussi pour $n + 1$; comme elle est démontrée pour $n = 1$, elle est vraie pour tout n fini, ce qui achève la démonstration. Le résultat très important est donc celui-ci : dès qu'une fonction est holomorphe (c'est-à-dire une fois dérivable), elle est *infiniment* dérivable.

En bout de course on peut remarquer que les expressions (2.70) et plus généralement (2.66) des dérivées s'obtiennent directement par dérivations sous le signe intégrale : les démonstrations ci-dessus montrent que de telles opérations sont légitimes, puisque la convergence est uniforme.

La formule (2.66) permet de démontrer d'importantes inégalités, appelées inégalités de Cauchy, énonçant des bornes supérieures pour toutes les dérivées d'une fonction holomorphe. Soit M le maximum du module d'une fonction f holomorphe dans un domaine $\mathcal{D}$, et soit d_{min} la plus petite distance de z à la frontière Γ de $\mathcal{D}$ (c'est-à-dire $d_{\text{min}} = \min_{\xi \in \Gamma} |\xi - z|$). En notant L la longueur de la frontière de $\mathcal{D}$, (2.66) permet d'écrire :

$$|f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\xi \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \left| \int_\Gamma \frac{M}{d_{\text{min}}^{n+1}} \, \mathrm{d}\xi \right| = \frac{n!}{2\pi} \frac{ML}{d_{\text{min}}^{n+1}} \ . \tag{2.74}$$

En particulier, si $f(z)$ est holomorphe (analytique) dans un disque $|z - z_0| < R$ et en choisissant ce dernier comme domaine $\mathcal{D}$, alors la plus petite distance est $d_{\text{min}} = R$ et $L = 2\pi R$. Dans ces conditions, (2.74) devient :

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M}{R^n} \qquad (n = 0, \, 1, \, 2, \, \ldots,) \ . \tag{2.75}$$

2.6 Illustrations

Il s'agit d'illustrer les résultats importants obtenus ci-dessus à propos de la fonction $z \rightarrow Z = z^n \equiv f(z)$ où $n \in \mathbb{Z}$. Ce choix n'est pas innocent, dans la perpective d'étudier ultérieurement la possibilité de représenter une fonction quelconque par une série entière. Visiblement, selon que n est positif ou négatif, $f(z)$ est bornée ou non. Ceci justifie, pour la clarté, d'étudier les différents cas séparément.

2.6.1 $n = 0, \, 1, \, 2, \, \ldots \iff n \in \mathbb{N}$

Pour les valeurs entières positives ou nulles de n, z^n est holomorphe dans tout le plan (ouvert). Par le théorème de Cauchy (voir (2.30)), on a donc de suite :

$$\int_C z^n \, \mathrm{d}z = 0 \ , \tag{2.76}$$

où C est n'importe quel contour fermé. Ce résultat s'obtient aussi d'une autre façon : la primitive de $f(z) = z^n$ est $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$. Pour un chemin quelconque reliant deux points d'affixes z_1 et z_2, on a donc :

$$\int_{z_1}^{z_2} z^n \, \mathrm{d}z = \left[\frac{z^{n+1}}{n+1} \right]_{z_1}^{z_2} = \frac{1}{n+1} (z_2^{n+1} - z_1^{n+1}) \ . \tag{2.77}$$

Si on adopte la représentation polaire, $z_j = \rho_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}$, il vient donc :

$$\int_{z_1}^{z_2} z^n \, \mathrm{d}z = \frac{1}{n+1} [\rho_2^{n+1} \mathrm{e}^{(n+1)\mathrm{i}\theta_2} - \rho_1^{n+1} \mathrm{e}^{(n+1)\mathrm{i}\theta_1}] \ . \tag{2.78}$$

Prenons maintenant $z_1 = z_2 = z_0 = \rho_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$, auquel cas l'intégrale doit être nulle, puisque le contour est fermé (cycle). C'est bien ce que donne le second membre de (2.78), quel que soit le contour, qu'il contienne ou non l'origine. Dans le premier cas, quand on décrit le cycle, l'argument part de la valeur θ_0 et y revient strictement à la fin du cycle. Dans ce second cas (l'origine est à l'intérieur du cycle), l'argument part de θ_0 et vaut $\theta_0 + 2\pi$ à la fin ; mais comme[31] $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)(\theta_0 + 2\pi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta_0}$ puisque $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)2\pi} = 1 \, \forall n \in \mathbb{Z}$, le second membre de (2.78) est encore nul.

Illustrons maintenant la formule de Cauchy, qui s'écrit ici :

$$z^n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_C \frac{\xi^n}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi \tag{2.79}$$

et, pour fixer les idées, choisissons[32] une fois pour toutes comme contour C le cercle γ_R de rayon R centré sur z.

[31] C'est ici que l'hypothèse $n \in \mathbb{N}$ est cruciale.

[32] Le peu qui a été dit sur les possibilités de déformer continûment le contour (sans faire décoller l'élastique) permet de deviner que les résultats énoncés avec γ_R restent vrais pour tout contour fermé entourant z.

Il s'agit donc de calculer directement le second membre de (2.79) et de vérifier qu'il vaut z^n. Pour cela, on écrit $\xi^n = [(\xi - z) + z]^n$ et on développe suivant la formule du binôme. Il vient alors :

$$\int_C \frac{\xi^n}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \sum_{p=0}^{n} C_n^p z^{n-p} \int_C (\xi - z)^{p-1}\,\mathrm{d}\xi \ . \tag{2.80}$$

Comme on l'a vu dans la section 2.3, le terme $p = 0$ mérite une attention particulière. En isolant ce terme :

$$\int_C \frac{\xi^n}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = z^n \int_C \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z} + \sum_{p=1}^{n} C_n^p z^{n-p} \int_C (\xi - z)^{p-1}\,\mathrm{d}\xi \tag{2.81}$$

Toutes les intégrales de la sommation de (2.81) sont nulles, puisqu'elles sont précisément de la forme $\int_C \xi'^q\,\mathrm{d}\xi'$ avec $q = p - 1 \geq 0$. Seule survit l'intégrale mise à part, venant du terme $p = 0$; d'après (2.53), elle vaut $2\mathrm{i}\pi$. Au total, le second membre de (2.79) vaut bien $\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\, z^n\,(2\mathrm{i}\pi) = z^n$, en accord avec la formule de Cauchy.

2.6.2 $n = -1, -2, \ldots$

À nouveau, il convient à ce stade d'effectuer une distinction, en traitant successivement les deux cas, $n = -1$ et $n \neq -1$.

■ $n = -1$

La fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ privé de l'origine. Pour tout contour fermé qui ne contient pas l'origine en son intérieur, on a donc :

$$\int_C z^{-1}\,\mathrm{d}z \,=\, 0 \ , \tag{2.82}$$

En effet, la primitive[33] de $\frac{1}{z}$ est $\ln z$, donc :

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \,=\, [\ln z]_{z_1}^{z_2} \,=\, \ln z_2 - \ln z_1 \ , \tag{2.83}$$

On sait que la fonction logarithme possède une infinité de déterminations, différant de $2\mathrm{i}k\pi$ les unes des autres ($k \in \mathbb{Z}$) ; bien évidemment, pour calculer la variation $\ln z_2 - \ln z_1$, il faut prendre la *même* détermination pour chaque terme, de sorte que par différence, le résultat est le même quelle que soit la détermination choisie[34]. Il en résulte :

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \,=\, \ln\frac{|z_2|}{|z_1|} + \mathrm{i}\theta_{21} \tag{2.84}$$

où l'angle θ_{21} est l'angle représentant la variation de l'argument quand on se déplace continûment de z_1 à z_2. Prenons maintenant un cycle commençant et se terminant au même point z_0 ($z_1 = z_2 = z_0$). Si le contour choisi ne contient pas l'origine, la variation de l'argument est nulle ($\theta_{21} = 0$) et (2.82) est vérifiée. Au contraire, si le cycle contient l'origine, on fait un tour complet en partant de z_0 et en y revenant : alors, si on tourne dans le sens positif, la variation de l'argument vaut $+2\pi$ ($\theta_{21} = 2\pi$) et l'intégrale au premier membre de (2.82) vaut $\mathrm{i} \times 2\pi$, un résultat généralisant celui obtenu en (2.52) par considération d'un cycle circulaire.

[33] À un niveau élémentaire, on apprend que la primitive de z^n est $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ pour $n \neq -1$, et $\ln z$ si $n = -1$, ce qui est indéniable. Il est toutefois intéressant de remarquer que ce dernier résultat peut s'obtenir en partant du cas général en y faisant tendre n vers -1. Ce "miracle" se produit tout simplement parce que la primitive de z^α est, $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$, égale à $\frac{z^\alpha}{\alpha+1}$. La limite $\alpha \to -1$ se trouve facilement en écrivant $z^{\alpha+1} = \mathrm{e}^{(\alpha+1)\ln z}$ et en développant l'exponentielle autour de $\alpha = -1$.

[34] Tout comme, en Physique, quand on calcule une variation d'énergie potentielle : le résultat est unique (c'est le travail de la force, qui n'a qu'une seule valeur !) et se moque de la constante additive choisie pour l'énergie potentielle.

■ $n \neq -1$

À nouveau, la fonction analysée $f(z) = z^n \equiv \frac{1}{z^{|n|}}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ privé de l'origine. Pour tout contour fermé qui ne contient pas l'origine en son intérieur, on a donc toujours :

$$\int_C z^{-|n|}\,\mathrm{d}z = 0 \ , \tag{2.85}$$

ce que l'on peut retrouver aussi en calculant la variation de la primitive $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1} \equiv \frac{1}{(n+1)z^{|n|-1}}$: c'est une fonction à une seule détermination, qui reprend donc la même valeur au départ et à l'arrivée.

Il en va de même si le contour C contient l'origine, pour la même raison : comme n est entier, la primitive $F(z)$ reprend la même valeur quand si l'argument de z a augmenté de 2π. Toutefois, *on ne peut pas ici invoquer la formule de Cauchy*, qui suppose la fonction holomorphe dans le domaine ceinturé par le contour : si (2.85) évoque bien la formule (2.55) avec $\xi = 0$, $f(z) = \frac{1}{z^{|n|-1}}$, cette formule n'est pas applicable puisque f n'est pas holomorphe en $z = 0$. Ceci n'est pas non plus en contradiction avec le théorème de Morera, qui exige que la fonction soit *continue* partout dans $\mathcal{D}$, ce qui n'est pas le cas ici.

En rassemblant tous ces résultats, on peut finalement écrire :

$$\int_C (z - z_0)^n\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi\,\delta_{n\,-1} \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{2.86}$$

où C est un contour contenant z_0 en son intérieur.

Remarques

- Il faut bien retenir que dans les énoncés des théorèmes précdents, chaque mot pèse : holomorphe, simplement connexe et, éventuellement, quantificateur ($\forall\, C$, par exemple).

  1. dans l'exemple qui vient d'être donné, la formule de Cauchy n'est pas applicable puisque le contour se situe dans un domaine *multiplement* connnexe (typiquement : une couronne délimitée par deux cercles centrés à l'origine), domaine d'holomorphie de la fonction.
  2. un autre exemple, où l'hypothèse manquante n'est pas la simple connexité, mais le fait que la fonction n'est pas holomorphe. Soit la fonction $z \to z^{*2} = f(z)$, visiblement non holomorphe ; il est facile de montrer[35] que :

  $$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\Gamma \frac{\xi^{*2}}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = z^{*2} \ , \tag{2.87}$$

  où Γ est un cercle centré sur z et de rayon quelconque. À nouveau, (2.87) a tout l'air d'être un cas particulier de la formule de Cauchy, mais il n'en est rien, puisque $f(z)$ n'est pas holomorphe.

- Le cas où n est quelconque (pas entier, mais réel voire complexe) est très intéressant en soi, mais exige une étude particulière : en effet, la fonction z^α étant multiforme, tous les théorèmes énoncés plus haut doivent être revisités et, éventuellement, convenablement généralisés (c'est ce qui justifie fondamentalement l'introduction des surfaces de Riemann, abordée ultérieurement). Une chose est sûre : pour α réel quelconque se substituant à n, (2.78) devient :

  $$\int_{z_1}^{z_2} z^\alpha\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\alpha+1}[\rho_2^{\alpha+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+1)\theta_2} - \rho_1^{\alpha+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+1)\theta_1}] \ . \tag{2.88}$$

  Si z_2 est infiniment proche de $z_1 = z_0$, le second membre est nul ou non, selon que l'on a tourné ou non autour de l'origine. Dans le premier cas, l'argument part d'une valeur donnée θ_0 et y revient :

  $$\int_{\text{cycle ne contenant pas O}} z^\alpha\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\alpha+1}\rho_0^{\alpha+1}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+1)\theta_0} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+1)\theta_0}] = 0 \ . \tag{2.89}$$

[35] Il suffit de calculer directement l'intégrale en paramétrant le cercle.

Au contraire, si l'origine est à l'intérieur du contour, l'argument passe de θ_0 à $\theta_0 + 2\pi$ de sorte que l'on a :

$$\int_{\text{cycle contenant O}} z^\alpha \, \mathrm{d}z \;=\; \frac{1}{\alpha+1}\rho_0^{\alpha+1}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+1)\theta_0} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+1)(\theta_0+2\pi)}] \;=\; \frac{\rho_0^{\alpha+1}}{\alpha+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+1)\theta_0}[1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha\pi}] \;\neq\; 0 \;\;, \quad (2.90)$$

puisque pour α non entier, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha\pi} \neq 1$. Comme on l'a déjà vu, l'origine est donc un point remarquable (singulier) : de ce point part une ligne continue de singularités, infranchissable tant que le caractère holomorphe doit être préservé, c'est une coupure.