

Chapitre 4

Applications élémentaires du théorème des résidus

Il s'agit de présenter les applications les plus fréquentes du théorème des résidus (calcul d'intégrales, de la somme de séries...)

Avant de présenter les applications les plus courantes en Physique du théorème des résidus, il convient d'établir les lemmes de Jordan, dont l'usage est tellement systématique qu'avec un peu de savoir-faire et d'habitude, on en vient à un usage mentionné pour la forme quand il n'est pas implicite. Ceci fait, les quelques exemples traités ensuite montreront que le théorème des résidus constitue un outil de calcul d'une puissance extraordinaire, et d'une rare élégance.

4.1 Lemmes de Jordan

Lemme 1

Les lemmes de Jordan sont des petits théorèmes d'usage systématique quand il faut compléter ou modifier un contour d'intégration. Le premier lemme s'énonce comme suit.

Soit une fonction $f(z)$ continue sur le secteur défini par $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi$, telle que¹ $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |zf(z)| \rightarrow 0$. Alors l'intégrale

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0, \quad (4.1)$$

où C_R est l'arc de cercle de rayon R compris entre les deux angles θ_1 et θ_2 .

L'intégrale en question est mise immédiatement sous forme réelle $\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta$. Le module de l'intégrale est borné par :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} |f(Re^{i\theta})| R d\theta \equiv \int_{\theta_1}^{\theta_2} |zf(z)| d\theta. \quad (4.2)$$

Par hypothèse, l'intégrand tend vers zéro uniformément, l'intervalle d'intégration est fini, donc l'intégrale est nulle à la limite.

Il existe une autre version de ce lemme, pour un contour en arc de cercle dont le rayon r tend vers zéro :

¹Cette hypothèse contient le fait que la limite est atteinte *uniformément* par rapport à l'argument θ de z .

Lemme 2

Soit une fonction $f(z)$ continue sur le secteur défini par $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi$, telle que $\lim_{|z| \rightarrow 0} |zf(z)| \rightarrow 0$. Alors l'intégrale

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = 0 . \quad (4.3)$$

où C_r est l'arc de cercle de rayon r compris entre les deux angles θ_1 et θ_2

La démonstration est la même que pour (4.1), et considère un petit arc de cercle de rayon r délimité par θ_1 et θ_2 .

Lemme 3

Un autre lemme très utile concerne les intégrands contenant un facteur de Fourier e^{iz} . Il s'énonce comme suit :

Soit une fonction $f(z)$ continue sur le secteur défini par $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi$, telle que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| \rightarrow 0$. Alors l'intégrale

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iz} f(z) dz = 0 , \quad (4.4)$$

où C_R est l'arc de cercle de rayon R compris entre les deux angles θ_1 et θ_2 .

Dans le cas où $\theta_1 > 0$ et $\theta_2 < \pi$, la démonstration est immédiate, puisque l'intégrand est borné en module par $e^{-R \sin \theta_{\min}}$ où θ_{\min} est $\min(\theta_1, \pi - \theta_2)$, qui tend exponentiellement vers zéro quand $R \rightarrow \infty$. La démonstration est moins facile pour le secteur semi-circulaire, très fréquent en pratique, où $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \pi$.

Soit donc l'intégrale sur le demi-cercle de rayon R :

$$I = \int_0^\pi e^{iz} f(z) iR e^{i\theta} d\theta = \int_0^\pi e^{iR(\cos \theta + i \sin \theta)} f(z) iR e^{i\theta} d\theta . \quad (4.5)$$

On a, décomposant l'intégrale en deux, et posant $\theta' = \pi - \theta$ dans la seconde :

$$|I| \leq \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} |f(z)| R d\theta = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} |f(Re^{i\theta})| d\theta + R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta'} |f(Re^{i(\pi-\theta')})| d\theta' . \quad (4.6)$$

Pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, on a $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$, comme on le voit en faisant un dessin. La première intégrale au second membre de (4.6) est donc bornée par :

$$R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} R \theta} |f(Re^{i\theta})| d\theta . \quad (4.7)$$

Comme $|f|$ tend vers zéro, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists R_\varepsilon$ tel que $\forall R > R_\varepsilon$, $|f| < \varepsilon$. D'où :

$$R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} R \theta} |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq \varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} R \theta} d\theta = \varepsilon R \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}) = \frac{\pi}{2} \varepsilon (1 - e^{-R}) \leq \frac{\pi}{2} \varepsilon . \quad (4.8)$$

Ainsi, $\forall R > R_\varepsilon$, $|f| < \varepsilon$, la première intégrale au second membre de (4.6) est bornée par $\frac{\pi}{2} \varepsilon$. Pour la deuxième intégrale de (4.6), l'argument est exactement le même. Au total $|\int_{C_R} e^{iz} f(z) dz| \leq \pi \varepsilon$, qui est aussi petit que l'on veut.

Attention !

Par la suite, on rencontrera des intégrales de ce type avec non pas e^{iz} mais e^{ikz} , $k \in \mathbb{R}$. Alors, si $k > 0$, le demi-cercle le long duquel l'intégrale tend vers zéro si $R \rightarrow +\infty$ est comme ci-dessus le demi-cercle supérieur, mais si $k < 0$, c'est le l'intégrale sur le demi-cercle *inférieur* qui tend vers zéro.

4.2 Calcul d'intégrales définies

Il s'agit de montrer comment, le calcul d'une intégrale sur un intervalle réel d'une fonction d'une variable réelle² $\int_a^b f(x)dx$ peut se ramener au calcul d'une certaine intégrale $\int_C \tilde{f}(z)dz$, de laquelle le théorème des résidus donne rapidement la valeur. Il y a *a priori* deux éléments à préciser : quel est le contour C ? Quelle est la fonction \tilde{f} ? Souvent, mais pas toujours, on a $\tilde{f} = f$; il faut parfois faire preuve d'un peu d'ingéniosité et travailler par essai et par erreur ; un peu d'entraînement permet de faire vite le tour de presque toutes les astuces permettant de trouver le bon contour C et la bonne fonction \tilde{f} . On trouvera ci-dessous (section 4.3) quelques exemples où \tilde{f} est franchement différente de f .

4.2.1 Fractions rationnelles

Soit l'intégrale :

$$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad (4.9)$$

où P et Q sont des polynômes. À un niveau élémentaire, on apprend à calculer ce type d'intégrale en effectuant la division des polynômes et/ou en décomposant en éléments simples. On va voir que, dans le cas où les bornes a et b sont $\pm\infty$, le théorème des résidus donne le résultat de façon quasi immédiate, en tout cas moins laborieuse. Plutôt que de donner des résultats formels, traitons quelques exemples d'intégrales du genre (4.9) avec $a = -\infty$, $b = +\infty$. Alors, pour que l'intégrale soit bien définie, il faut que le rapport $\frac{P}{Q}$ tende plus vite que $|x|^{-1}$ à l'infini : le degré de P doit être plus petit d'au moins une unité de celui de Q .

Exemple 1

Soit à calculer l'intégrale³ :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx . \quad (4.10)$$

Pour appliquer le théorème des résidus, il faut fermer le contour. Partant de la droite réelle figurant dans (4.10), il n'est pas forcément facile de voir comment s'y prendre. Commençons par considérer l'intégrale (4.10) avec des bornes finies $\pm R$, sans avoir d'état d'âme sur le fait que la limite pour en arriver à (4.10) doit en toute rigueur être prise en faisant tendre *indépendamment* vers l'infini les deux bornes⁴. Le point de départ est donc :

$$\int_{-R}^{+R} \frac{1}{x^4 + 1} dx . \quad (4.11)$$

La façon sans doute la plus simple pour former un contour fermé est de relier les deux extrémités du segment

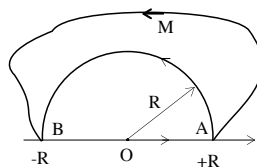


Figure 4.1: Contour C d'intégration pour le calcul de l'intégrale réelle (4.11) en passant par (4.12).

$[-R, +R]$ par un demi-cercle centré à l'origine et de rayon R . Par en-haut ou par en bas ? *A priori*, aucun choix

²La fonction elle-même n'est pas forcément réelle mais peut tout à fait être à valeurs complexes – par exemple, ce peut être l'intégrand apparaissant dans la transformation de Fourier d'une fonction, elle-même réelle ou complexe.

³Cette intégrale peut aussi se calculer par des moyens élémentaires (décomposition en éléments simples et utilisation de primitives connues).

⁴Dans le cas présent, il n'y a aucune difficulté puisque l'intégrand se comporte comme $|x|^{-4}$ à l'infini.

ne s'impose à l'esprit, et commençons par refermer par en-haut. Enfin, aucune raison ne semble devoir changer la fonction f en une autre fonction \tilde{f} . On essaie donc de trouver I en considérant la fonction $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ – qui n'est autre que la fonction de départ calculée pour un complexe z quelconque – et son intégrale :

$$\tilde{I} = \int_C \frac{1}{z^4+1} dz \quad (4.12)$$

où C est le contour indiqué sur la fig. 4.1. Tout ce que l'on sait permet d'affirmer que le choix d'un *demi-cercle* est fait pour la commodité du calcul : on pourrait tout autant refermer par n'importe quelle ligne du genre AMB, cela ne changerait pas la valeur de l'intégrale. Le choix du demi-cercle étant fait, celle-ci est la somme des deux intégrales :

$$\tilde{I}_R = \int_{-R}^{+R} \frac{1}{x^4+1} dx + \int_0^\pi \frac{1}{(Re^{i\theta})^4+1} d(Re^{i\theta}) \quad (4.13)$$

La première intégrale, dans la limite $R \rightarrow +\infty$, est celle que l'on cherche ; le théorème des résidus va vite donner l'intégrale du premier membre. Il faut donc être en mesure de calculer l'intégrale sur le demi-cercle, le cas "idéal" étant celui où elle vaut zéro quand $R \rightarrow +\infty$. C'est le cas ici, par le lemme de Jordan (4.1) : la fonction $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ est bien telle $|zf(z)| \rightarrow 0$ quand $|z| \rightarrow +\infty$, de sorte que la deuxième intégrale dans (4.13) est nulle à la limite $R \rightarrow +\infty$. Il reste donc :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \tilde{I}_R = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx , \quad (4.14)$$

qui est bien l'intégrale cherchée (4.10). Maintenant, \tilde{I}_R au premier membre se calcule rapidement par résidus, quel que soit R assez grand⁵ : il suffit de localiser, d'identifier les singularités de $\tilde{f} = \frac{1}{z^4+1}$ et de trouver les résidus. Le dénominateur est un polynôme du quatrième degré, il y a donc des pôles, qui sont les zéros de z^4+1 , c'est-à-dire les quatre racines de l'équation $z^4+1=0$, soit $z_k = e^{i(2k+1)\pi/4}$, $k=0, 1, 2, 3$. Seuls les deux pôles z_0 et z_1 ont une partie imaginaire positive et se trouvent de ce fait dans le contour. Le dénominateur s'écrit $\prod_{k=0}^3 (z-z_k)$. Le résidu en z_0 est donc simplement $\lim_{z \rightarrow z_0} 1/[(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)]$, soit $1/[(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_1-z_3)]$, etc ; on trouve successivement⁶ :

$$\text{Res en } z_0 = \frac{1}{i\sqrt{2}(2+2i)} , \quad \text{Res en } z_1 = \frac{1}{i\sqrt{2}(2-2i)} \quad (4.16)$$

d'où, dès que $R > 1$:

$$\tilde{I}_R \equiv \int_{-R}^{+R} \frac{1}{x^4+1} dx + \int_0^\pi \frac{1}{(Re^{i\theta})^4+1} d(Re^{i\theta}) = 2i\pi \left[\frac{1}{i\sqrt{2}(2+2i)} + \frac{1}{i\sqrt{2}(2-2i)} \right] \quad (4.17)$$

d'où résulte, pour R infini :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = 2i\pi \left[\frac{1}{i\sqrt{2}(2+2i)} + \frac{1}{i\sqrt{2}(2-2i)} \right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}} . \quad (4.18)$$

En définitive, on trouve donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = 2i\pi(\text{Res en } z_0 + \text{Res en } z_1) . \quad (4.19)$$

Bien sûr, on peut tout autant refermer le contour par le demi-cercle situé dans le demi-plan inférieur. Comme le contour est alors parcouru dans le sens négatif, il ne faut pas oublier le signe global, et prendre tous les résidus relatifs aux pôles situés dans le demi plan inférieur ; on a alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = (-2i\pi)(\text{Res en } z_2 + \text{Res en } z_3) . \quad (4.20)$$

⁵Il suffit que le demi-cercle contienne tous les pôles de $f(z)$, soit $R > 1$: dès lors, il ne se passe plus rien lorsque R augmente, sauf que la contribution de la périphérie du grand cercle tend vers zéro quand $R \rightarrow +\infty$.

⁶Les résidus se calculent aussi par :

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, z_k\right) = \frac{1}{(z^4+1)'_{z_k}} = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{1}{4e^{i(2k+1)\frac{3\pi}{4}}} . \quad (4.15)$$

Tous calculs faits, on retrouve le même résultat (heureusement !) qu'en (4.18). Ceci n'est pas un hasard, évidemment. En rapprochant (4.19) et (4.20), on observe que :

$$\text{Res en } z_0 + \text{Res en } z_1 + \text{Res en } z_2 + \text{Res en } z_3 = 0 . \quad (4.21)$$

Il n'est pas difficile de comprendre le sens d'une telle relation. En effet, considérons un grand contour *faisant le tour du plan complexe* à l'infini, par exemple un cercle C_R de rayon R dont on va prendre la limite $R = \infty$. Par le théorème des résidus, on a :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 2i\pi \sum_k \text{Res}[f(z), z_k] , \quad (4.22)$$

où la somme court cette fois sur *tous* les pôles (à la limite, tous les pôles sont dans le contour). D'un autre côté, l'intégrale au premier membre de (4.22) est nulle à la limite, comme on le voit en appliquant le lemme de Jordan aux deux demi-cercles, d'où (4.21).

Il est souvent utile de systématiser cette remarque, en définissant le *résidu à l'infini* d'une fonction $f(z)$:

$$\text{Res}[f(z), \infty] \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{1}{2i\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz . \quad (4.23)$$

En d'autres termes, le résidu à l'infini est l'intégrale de f sur un cercle infiniment grand parcouru dans le sens *négatif*, divisée⁷ par $2i\pi$. Avec cette définition, l'équation (4.22) se relit comme suit :

$$\text{Res}[f(z), \infty] + \sum_k \text{Res}[f(z), z_k] = 0 , \quad \forall z_k, |z_k| < \infty . \quad (4.24)$$

Ce résultat est tout à fait général : pour toute fonction méromorphe, la somme de tous les résidus (y compris le résidu à l'infini) est toujours nulle :

$$\sum_k \text{Res}[f(z), z_k] = 0 , \quad \forall z_k, |z_k| \leq \infty . \quad (4.25)$$

En effet, il suffit de partir du contour à l'infini et de le déformer en tirant des brins en direction de chaque pôle pour vérifier géométriquement que l'égalité est vraie. Il faut savoir que si l'on cherche la somme de presque tous les résidus de pôles à distance finie, il est souvent moins laborieux de calculer les résidus des pôles délaissés et du pôle à l'infini, d'en faire la somme et de changer le signe pour trouver la somme d'intérêt.

Pour une fonction telle que $|zf(z)| \rightarrow 0$ uniformément par rapport à l'argument de z , le résidu à l'infini est nul. Enfin, si la notion de résidu à l'infini est troublante, on peut toujours se ramener au calcul d'un résidu à l'origine. En effet, soit une fonction $f(z)$; par définition, on a :

$$\text{Res}[f(z), \infty] = -\frac{1}{2i\pi} \int_{C_\infty} f(z) dz ; \quad (4.26)$$

posons $Z = \frac{1}{z}$, $f(z = \frac{1}{Z}) = \phi(Z)$, il vient⁸ :

$$\text{Res}[f(z), \infty] = -\frac{1}{2i\pi} \int_{C_0} \phi(Z) \frac{-dZ}{Z^2} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_0} \frac{1}{Z^2} \phi(Z) dZ = \text{Res}[Z^{-2}\phi(Z), 0] . \quad (4.27)$$

Exemple 2

Soit à calculer l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{2n} + 1} dx , \quad n = 1, 2, \dots . \quad (4.28)$$

⁷On remarque l'analogie avec la définition du résidu en un point à distance finie.

⁸Si z décrit le contour à l'infini dans le sens négatif, Z^{-1} décrit dans le sens positif un cercle de rayon infiniment petit autour de l'origine.

Pour utiliser ultérieurement un grand demi-cercle, on commence par réécrire :

$$I_n = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^{2n} + 1} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.29)$$

Complétons maintenant le contour par le grand demi-cercle supérieur (l'autre donnerait le même résultat !), dont la contribution tend vers zéro quand le rayon tend vers l'infini. Il vient donc :

$$I_n + 0 = \frac{1}{2} 2i\pi \sum_k \operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^{2n} + 1}, z_k \right]. \quad (4.30)$$

Les z_k sont les zéros du dénominateur, donnant chacun un pôle d'ordre un :

$$z_k + 1 = 0 \iff z_k = e^{i\frac{2k+1}{2n}\pi}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1. \quad (4.31)$$

Le résidu vaut $\frac{1}{2nz_k^{2n-1}} = \frac{z_k}{2nz_k^{2n}} = -\frac{1}{2n} e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$. La \sum_k dans (4.30) fait intervenir une progression géométrique, et on trouve finalement⁹ :

$$I_n = \frac{\pi}{2n \sin \frac{\pi}{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (4.32)$$

On note que si $n \gg 1$, on a $I_n \simeq 1 + \frac{\pi^2}{24n^2}$, un résultat qui ne saute pas aux yeux au vu de la définition intégrale (4.28).

Exemple 3

Soit à calculer l'intégrale :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^6}{(x^4 + 1)^2} dx. \quad (4.33)$$

On utilise le même contour que précédemment, en remarquant que la parité de l'intégrand permet d'écrire :

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6}{(x^4 + 1)^2} dx. \quad (4.34)$$

Le lemme de Jordan s'applique puisque quand R est grand, l'intégrand se comporte comme $R^6/(R^4)^2 = R^{-2}$: l'intégrale sur le demi-cercle vaut zéro à la limite R infini. On retrouve les mêmes pôles que dans l'exemple 1 ci-dessus, mais ils sont ici d'ordre deux. Après calcul, on trouve :

$$I_1 = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16}. \quad (4.35)$$

C'est d'ailleurs un bon exemple pour montrer comment, par un changement d'échelle (*scaling* en anglais), ce résultat permet de trouver la valeur d'une intégrale plus générale. Soit en effet¹⁰ :

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^6}{(x^4 + a^4)^2} dx \quad (a \in \mathbb{R}_+). \quad (4.36)$$

On voit que $I(a=1) = I_1$; en posant $x = ax'$, il vient :

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{a^6 x'^6}{a^8 (x'^4 + 1)^2} a dx' = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{x^6}{(x^4 + 1)^2} dx = \frac{1}{a} I_1, \quad (4.37)$$

⁹Pour $n = 1$, I_n peut s'obtenir par des moyens élémentaires, qui donnent immédiatement $I_1 = \frac{\pi}{2}$: c'est bien ce que dit aussi (4.32).

¹⁰La restriction $a \in \mathbb{R}_+$ est essentielle pour pouvoir obtenir le résultat cherché à partir de (4.28), puisque le nombre 1 est un nombre positif. D'ailleurs, le résultat (4.38) est visiblement faux pour $a < 0$ par exemple, puisque l'intégrale de départ est encore dans ce cas une quantité visiblement positive. Ceci étant précisé, rien n'empêche de prolonger analytiquement l'expression (4.38), qui est définie dans $\mathbb{C} - \{0\}$.

d'où :

$$I(a) = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16a} \quad (a > 0) . \quad (4.38)$$

Le *scaling* $I(a) \propto \frac{1}{a}$ se devine d'ailleurs d'emblée : il suffit d'imaginer que a a une dimension physique (une longueur, par exemple), auquel cas x est aussi une longueur ; l'analyse dimensionnelle sur l'expression de départ (4.37) montre immédiatement que $[I] = L^{-1}$, de sorte que, a étant la seule longueur disponible, on a forcément $I(a) = \frac{\text{nombre}}{a}$.

Exemple 3

Comme exemple impliquant des pôles d'ordre n , soit l'intégrale :

$$I_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx \quad (a > 0, n = 1, 3, \dots) . \quad (4.39)$$

Pour $n = 1$, on trivialement $I_1 = \frac{\pi}{2a}$; pour $n = 2, 3, \dots$, on peut procéder comme suit. La première chose à noter est que l'intégrale va seulement de 0 à $+\infty$, alors que la méthode consistant à refermer le contour par un grand cercle exige que le segment d'intégration aille de $-\infty$ à $+\infty$. À nouveau, ce n'est pas ici un obstacle, puisque l'intégrand est pair : on considère $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty}$; de surcroît, la dépendance en a est visiblement très simple : l'homogénéité montre que $I(a)$ est homogène à a^{-2n+1} ; on peut se débarrasser de a en posant $x = ax'$. Au total, on a :

$$I_n(a) = \frac{1}{2a^{2n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x'^2 + 1)^n} dx' . \quad (4.40)$$

La suite du calcul procède comme précédemment, à l'aide d'un contour comme sur la fig. 4.1 (mais on pourrait ici tout autant refermer par le bas, sans oublier le signe devant $2i\pi$!). La fonction à intégrer a deux pôles d'ordre n en $z = \pm i$, mais seul l'un d'entre eux est à considérer, $+i$ si on referme en haut, $-i$ dans le cas contraire. Si on ferme en haut, il faut donc calculer le résidu :

$$\text{Res} \left[\frac{1}{(z^2 + 1)^n}, z = +i \right] = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{(z+i)^n} \right]_{z=i} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{(-1)^{n-1}}{(2i)^{2n-1}} n(n+1)(n+2)\dots(2n-2) . \quad (4.41)$$

Au total, l'intégrale $I_n(a)$ vaut :

$$I_n(a) = 2i\pi \frac{1}{2a^{2n-1}} \frac{1}{(n-1)!} \frac{(-i)}{2^{2n-1}} n(n+1)(n+2)\dots(2n-2) , \quad (4.42)$$

et peut se mettre sous la forme :

$$I_n(a) = \frac{\pi}{a^{2n-1}} \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2^n(n-1)!} \quad (n \geq 2) . \quad (4.43)$$

4.2.2 Intégrales d'une fonction rationnelle de lignes trigonométriques

Ce sont des intégrales du genre :

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \quad (4.44)$$

où $R(X, Y)$ est une fonction rationnelle (ne contenant que des puissances entières) de lignes trigonométriques circulaires. L'astuce consiste à remarquer que sur le cercle centré à l'origine et de rayon unité, on a $z = e^{i\theta}$, θ variant de 0 à 2π (par exemple) quand l'affixe de z parcourt une fois et une seule le cercle dans le sens positif ; sur le cercle, on a $dz = ie^{i\theta} d\theta$, c'est-à-dire réciproquement $d\theta = i^{-1}e^{-i\theta} dz = \frac{dz}{iz}$. En utilisant les formules d'Euler, une intégrale telle que (4.44) s'écrit donc :

$$\int_{\text{cercle unité}} R \left(\frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right) \frac{dz}{iz} \equiv \int_{\text{cercle unité}} \mathcal{R}(z), dz , \quad (4.45)$$

où \mathcal{R} est visiblement une fraction rationnelle en z – donc il n'existe pas de coupure et on peut envisager des contours fermés.

Par exemple, soit à calculer :

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{a + \cos \theta} d\theta \quad (n \in \mathbb{N}; a \in \mathbb{R}, a > 1) \quad (4.46)$$

(par la formule de Moivre, $\cos n\theta$ est bien une expression rationnelle en $\cos \theta$). En posant $z = e^{i\theta}$, il vient

$$I_n = \int_{\text{cercle unité}} \frac{\frac{1}{2}(z^n + \frac{1}{z^n})}{a + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} \frac{dz}{iz}, \quad (4.47)$$

soit :

$$I_n = i^{-1} \int_{\text{cercle unité}} \frac{z^{2n} + 1}{z^n(z^2 + 2az + 1)} dz. \quad (4.48)$$

Il y a un pôle d'ordre n à l'origine, ce qui est une bonne occasion d'appliquer (astucieusement) la formule donnant le résidu en un tel pôle¹¹. En outre, les deux racines (simples, produit des racines égal à 1) du trinôme au dénominateur donnent chacune un pôle d'ordre un, $z_{\pm} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1} \in \mathbb{R}$. z_+ est effectivement de module inférieur à 1, donc dans le cercle (comme $z_- z_+ = 1$, z_- est en-dehors du cercle). D'où :

$$I_n = 2i\pi \frac{1}{i} (\text{Res au pôle d'ordre } n \text{ en } 0 + \text{Res au pôle d'ordre } 1 \text{ en } z_+). \quad (4.50)$$

Le calcul donne :

$$\text{Res au pôle d'ordre } 1 \text{ en } z_+ = \frac{z_+^n + z_-^n}{z_+ - z_-}, \quad \text{Res au pôle d'ordre } n \text{ en } 0 = \frac{z_+^n - z_-^n}{z_+ - z_-}. \quad (4.51)$$

Au total, il vient :

$$I_n = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} (\sqrt{a^2 - 1} - a)^n \quad (n \in \mathbb{N}; a \in \mathbb{R}, a > 1). \quad (4.52)$$

Cette fonction de a se prolonge analytiquement par continuité, en notant que l'intégrale (4.46) est réelle si $a \in \mathbb{R}$ et $|a| > 1$, et bornée si $a \in \mathbb{C}$, $|a| > 1$: la coupure est donc contrainte par le fait qu'elle part de -1 et arrive en $+1$; on peut ainsi prendre le segment $[-1, +1]$ de l'axe réel. Par ailleurs, sur la définition (4.46), on voit que $I_{-n} = I_n$.

Ce résultat peut s'interpréter comme suit. Compte tenu du fait que $\sin \theta$ est impair sur $[0, 2\pi]$ de part et d'autre de π , I_n donné par (4.46) peut aussi s'écrire :

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-in\theta}}{a + \cos \theta} d\theta \quad (n \in \mathbb{N}; a \in \mathbb{R}, a > 1). \quad (4.53)$$

Autrement dit, $\frac{1}{2\pi} I_n$ est la composante de Fourier de la fonction (paire) 2π -périodique $\frac{1}{a + \cos \theta}$. On en déduit l'égalité :

$$\frac{1}{a + \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{I_n}{2\pi} e^{in\theta}. \quad (4.54)$$

Afin de simplifier les écritures, on pose $a = \cosh \phi$ ($\phi > 0$), de sorte que :

$$z_+ = -e^{-\phi}, \quad z_- = -e^{+\phi}, \quad I_n = 2\pi \frac{(-1)^n e^{-|n|\phi}}{\sinh \phi}; \quad (4.55)$$

alors (4.54) s'écrit :

$$\frac{1}{\cosh \phi + \cos \theta} = \frac{1}{\sinh \phi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|n|\phi} e^{in(\theta+\pi)} \iff \frac{1}{\cosh \phi - \cos \theta} = \frac{1}{\sinh \phi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|n|\phi} e^{in\theta}. \quad (4.56)$$

La série au second membre peut d'ailleurs se sommer facilement, et on retrouve bien ce qu'il faut.

¹¹qui s'écrit ici :

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{z^{2n} + 1}{z^2 + 2az + 1}. \quad (4.49)$$

On calcule la dérivée par la formule de Newton ; quand $z = 0$, un seul terme subsiste, que l'on trouve facilement en décomposant $\frac{1}{z^2 + 2az + 1}$ en éléments simples.

4.2.3 Intégrales de Fourier

Ce sont des intégrales du genre :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f(x) dx \quad (k \in \mathbb{R}) , \quad (4.57)$$

Pour évaluer ces intégrales, l'idée est de refermer par un demi-cercle comme sur la fig. 4.1 et d'invoquer le lemme de Jordan 3, (4.4), mais attention : pour que l'intégrale additionnelle tende vers zéro quand $R \rightarrow +\infty$, il faut que k soit positif. En effet, sur le demi-cercle supérieur $|e^{ikRe^{i\theta}}| = e^{-kR \sin \theta}$, qui ne tend vers zéro que si $0 < k \sin \theta$: c'est bien le cas pour ce demi-cercle supérieur quand $k > 0$. Quand $k < 0$, il faut visiblement refermer par le demi-cercle *inférieur* pour que l'intégrale supplémentaire, apparaissant pour avoir un contour fermé, donne une contribution nulle¹².

Soit par exemple à calculer l'intégrale :

$$I(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2 + a^2} dx \quad (k \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+) , \quad (4.58)$$

qui apparaît très souvent en Physique¹³. On introduit donc $f(z) = \frac{e^{ikz}}{z^2 + a^2}$, une fonction qui a deux pôles simples en $\pm ia$, et I_R pour $k > 0$, d'où :

$$\tilde{I}_R = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ikx}}{x^2 + a^2} dx + \int_0^\pi \frac{e^{ikRe^{i\theta}}}{(Re^{i\theta})^2 + a^2} d(Re^{i\theta}) . \quad (4.59)$$

Seul le pôle en $z = ia$ est dans le contour, et le résidu vaut $\lim_{z \rightarrow ia} [(z - ia) \frac{e^{ikz}}{z^2 + a^2}] = \frac{e^{(ik)(ia)}}{2ia}$. Il vient donc :

$$I(k) = 2i\pi \frac{e^{(ik)(ia)}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-ka} \quad (k > 0) . \quad (4.60)$$

Pour trouver $I(k)$ quand $k < 0$, il suffit de noter que le changement de variable $x' = -x$ dans (4.58) donne immédiatement $I(-k) = I(k)$, de sorte que :

$$I(k) = \frac{\pi}{a} e^{-|k|a} \quad \forall k \in \mathbb{R} . \quad (4.61)$$

Toutefois, cela vaut la peine de retrouver ceci par résidus. Quand k est négatif, on ferme par le demi-cercle inférieur, de sorte que le contour est parcouru dans le sens négatif, ce qui fait apparaître un signe $-$ global, que l'on traduit par le facteur $(-2i\pi)$ dans l'application du théorème des résidus. Le pôle pertinent est maintenant en $-ia$, le résidu vaut $\frac{e^{(ik)(-ia)}}{-2ia}$. On trouve donc :

$$I(k) = (-2i\pi) \frac{e^{(ik)(-ia)}}{-2ia} = \frac{\pi}{a} e^{ka} \quad (k < 0) . \quad (4.62)$$

En comparant (4.60) et (4.62), on retrouve bien (4.61), dont le graphe est une courbe en toile de tente.

Il vaut la peine de remarquer que $I(k)$, (4.61), n'est pas dérivable en $k = 0$. Ceci vient du fait que l'intégrand de (4.58) ne décroît pas assez vite quand $x \rightarrow +\infty$ (on comprendra pourquoi au ch. 6 consacré à l'analyse de Fourier). On doit déjà retenir que, pour une intégrale de Fourier, ce qui se passe près de $k = 0$ est conditionné par le comportement du facteur de e^{ikx} dans l'intégrand quand $x \rightarrow +\infty$ (et réciproquement) ; la décroissance *lente* de $\frac{1}{x^2 + a^2}$ à *l'infini* pour x induit une singularité à *l'origine* pour $I(k)$. k et x sont en quelque sorte des variables¹⁴ *duales* (on dit aussi *conjuguées*). D'ailleurs, si on fabrique l'intégrale $I^{(1)}$ en prenant la dérivée en k de l'intégrand :

$$I^{(1)}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ike^{ikx}}{x^2 + a^2} dx \quad (k \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+) , \quad (4.63)$$

¹²On peut aussi refermer avec le "mauvais" demi-cercle – qui donne une contribution finie, évidemment –, mais il faut alors calculer l'intégrale correspondante. Si cette façon de faire est particulièrement malhabile, elle donne évidemment le même résultat, moyennant un calcul beaucoup plus laborieux.

¹³C'est la transformée de Fourier d'une lorentzienne.

¹⁴Ces considérations sont le fondement technique des relations d'incertitude de Heiseberg.

un calcul de résidus montre que :

$$I^{(1)}(k) = -\pi \operatorname{sgn} k e^{-|k|a} , \quad (4.64)$$

qui est effectivement égal à $I'(k)$; le calcul explicite de $I^{(1)}(k)$ valide *de facto* la dérivation sous le signe \int , que l'on peut aussi justifier par des arguments de convergence uniforme vis-à-vis du rayon R du grand cercle qui referme à chaque fois le contour. On note enfin que $I^{(1)}(k)$ a une singularité plus violente que $I(k)$: c'est parce que l'intégrand de (4.63) décroît à l'infini encore plus lentement que celui de (4.58).

La même méthode fonctionne aussi dans le cas suivant. Soit à calculer l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx . \quad (4.65)$$

En examinant les propriétés de parité de l'intégrand, on voit que I est aussi égale à¹⁵ :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 e^{ix}}{x^4 + 5x^2 + 4} dx ; \quad (4.66)$$

en effet, ce faisant, on a ajouté un intégrand impair dont l'intégrale entre $\pm\infty$ est nulle. On trouve facilement les zéros du dénominateur (racines d'une équation bicarrée), qui sont tous simples : tous les pôles sont donc d'ordre un. Fermant avec le demi-cercle dans le demi-plan *supérieur*, et utilisant le lemme 3 de Jordan pour les intégrands de Fourier, on trouve :

$$I = \frac{\pi}{3e^2}(4 - e) . \quad (4.67)$$

4.2.4 Exemples divers

Exemple 1

Donnons un exemple qui utilise une astuce revenant assez souvent en pratique. Soit à calculer l'intégrale (due à Euler) :

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx \quad (0 < \Re a < 1) . \quad (4.68)$$

Il est facile de voir que cette intégrale converge aux deux infinis (et indépendamment) pourvu que $0 < \Re a < 1$, d'où la précision ci-dessus à droite ; la relation (4.68) définit donc une fonction $I(a)$ analytique dans la bande délimitée par les deux droites verticales d'abscisses 0 et 1.

Tout naturellement, on introduit la fonction $f(z)$:

$$f(z) = \frac{e^{az}}{e^z + 1} , \quad (4.69)$$

et l'astuce consiste à utiliser le fait que si z augmente de $2i\pi$, f est multipliée par $e^{2i\pi a}$:

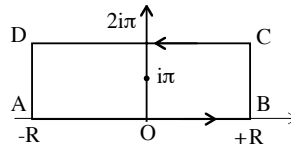
$$f(z + 2i\pi) = \frac{e^{a(z+2i\pi)}}{e^{z+2i\pi} + 1} = \frac{e^{2i\pi a} e^{az}}{e^z + 1} = e^{2i\pi a} f(z) . \quad (4.70)$$

Comme contour, on prend un rectangle ABCDA (parcouru dans le sens positif) dont les grands côtés sont le segment AB $[-R, +R]$ sur l'axe réel, et le segment CD translaté de $+2i\pi$. Les petits côtés sont les deux segments verticaux BC et DA allant de $\pm R$ à $\pm R + 2i\pi$. À l'intérieur de ce contour, il y a un pôle d'ordre un en $z = i\pi$; le résidu correspondant est¹⁶ :

$$\lim_{z \rightarrow i\pi \mp \varepsilon \rightarrow 0} (z - i\pi) \frac{e^{a(i\pi+\varepsilon)}}{e^{i\pi+\varepsilon} + 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \frac{e^{a(i\pi+\varepsilon)}}{-e^\varepsilon + 1} = -e^{i\pi a} . \quad (4.71)$$

¹⁵ I est donc une intégrale de Fourier.

¹⁶ Le résidu se calcule aussi par $\left(\frac{e^{ax}}{(e^x+1)'}\right)_{e^{i\pi}} = \frac{e^{i\pi a}}{e^{i\pi}} = -e^{i\pi a}$.

Figure 4.2: Contour C d'intégration pour le calcul de l'intégrale réelle (4.68).

D'où :

$$\int_{\text{ABCD}} \frac{e^{az}}{e^z + 1} dz = (2i\pi)(-e^{i\pi a}) . \quad (4.72)$$

Par ailleurs, grâce à la propriété ci-dessus, on a :

$$\int_{\text{ABCD}} f(z) dz = (1 - e^{2i\pi a}) \int_{\text{AB}} f(z) dz + \int_{\text{BC} \cup \text{DA}} f(z) dz . \quad (4.73)$$

Montrons en détail que les deux segments verticaux BC et DA donnent une contribution nulle à la limite R infini. Le long du segment vertical BC, $z = R + iy$, $0 \leq y \leq 2\pi$, donc e^{R+iy} part de e^R en $y = 0$, vaut $-e^R$ pour $y = \pi$ et revient à sa valeur de départ pour $y = 2\pi$. En conséquence, le module du dénominateur varie de $|1 + e^R|$ à $|1 - e^R|$ sur ce segment. Pour $R > 0$, la borne inférieure du module du dénominateur est donc $|e^R - 1|$. En ce qui concerne le numérateur, et posant¹⁷ $a = \alpha e^{i\phi}$, $\alpha > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \phi < +\frac{\pi}{2}$, on a :

$$|e^{a(R+iy)}| = |e^{\alpha R e^{i\phi}} e^{i\alpha y e^{i\phi}}| = e^{\alpha R \cos \phi} e^{-\alpha y \sin \phi} \leq e^{\alpha R \cos \phi} e^{+\alpha y} \leq e^{\alpha R \cos \phi} e^{+2\pi\alpha} . \quad (4.74)$$

En rassemblant les majorations, il vient :

$$\left| \frac{e^{a(R+iy)}}{e^{R+iy} + 1} \right| \leq e^{\alpha R \cos \phi} e^{+\alpha y} \frac{1}{e^R - 1} = \frac{e^{-(1-\alpha \cos \phi)R} e^{2\pi\alpha}}{1 - e^{-R}} . \quad (4.75)$$

Soit une certaine valeur fixe R_0 de R ; on a $1 - e^{-R} \geq 1 - e^{-R_0} \forall R \geq R_0$. Donc :

$$\left| \frac{e^{a(R+iy)}}{e^{R+iy} + 1} \right| \leq \frac{e^{-(1-\alpha \cos \phi)R} e^{2\pi\alpha}}{1 - e^{-R_0}} \quad \forall R \geq R_0 . \quad (4.76)$$

Comme $0 < \Re a = \alpha \cos \phi < 1$, le numérateur décroît exponentiellement quand R augmente : le module de la contribution du segment BC est donc borné par une quantité qui tend vers zéro quand $R \rightarrow +\infty$. *Mutatis mutandis*, le même argument vaut pour le segment DA.

Ainsi, avec la condition $0 < \Re a < 1$, les contributions des deux segments verticaux sont chacune exponentiellement petites quand R est grand : à la limite, l'intégrale sur les deux côtés horizontaux, à elle seule, reproduit *in extenso* l'intégrale cherchée (4.68). Il vient alors, par le théorème des résidus :

$$(1 - e^{2i\pi a}) \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{az}}{e^z + 1} dz = (2i\pi)(-e^{i\pi a}) , \quad (4.77)$$

soit :

$$(1 - e^{2i\pi a}) I = -2i\pi e^{i\pi a} \iff I = \frac{\pi}{\sin \pi a} . \quad (4.78)$$

Au total :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad (0 < \Re a < 1) . \quad (4.79)$$

Sur l'expression finale, on vérifie bien ce que l'on sait depuis le début (que $I(a)$ diverge si $\Re a = 0$ ou 1). Il ne faut jamais négliger ce genre de vérification¹⁸. D'un autre côté, le second membre de (4.79) est défini partout dans le plan $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$; les deux fonctions $I(a)$ et $I_1(a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$ coïncident dans la bande $0 < \Re a < 1$: la fonction $I_1(a)$ est bien le prolongement analytique¹⁹ de $I(a)$ à l'extérieur de la bande.

¹⁷ Comme a est dans la bande $0 < \Re a < 1$, l'argument de a est borné entre $\pm \frac{\pi}{2}$.

¹⁸ qui n'en est une que si l'intégrale de départ est absolument convergente, ce qui est le cas ici. En revanche, une intégrale *semi-convergente* peut présenter des discontinuités (l'intégrale de la limite peut être distincte de la limite de l'intégrale).

¹⁹ D'après le théorème du prolongement analytique vu antérieurement, il suffit que les fonctions coïncident sur la frontière commune des domaines.

Exemple 2

Par des moyens analogues, on montre que :

$$I(a, \alpha) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{\cosh x + \cosh \alpha} dx = \frac{\pi \sin \alpha a}{\sinh \pi a \sinh \alpha} \quad (-1 < \Im a < +1) . \quad (4.80)$$

Sur le résultat final, on observe que $I(a, \alpha)$, considérée comme une fonction de α seul, a une singularité éliminable en $\alpha = 0$: en effet, l'intégrale de départ est bien définie en ce point²⁰. De la même façon, considérée comme une fonction de a , $I(a, \alpha)$ a aussi une singularité éliminable en $a = 0$. Par ailleurs, le résultat (4.80) se prolonge analytiquement et définit une fonction méromorphe de α ou de a ayant des pôles en $\alpha_k = ik\pi$ et en $a_l = il$ ($(k, l) \in \mathbb{Z}^{*2}$).

Exemple 3

D'une façon plus générale, si $f(z)$ est une fonction méromorphe de période $i\omega$ ayant des pôles z_k dans la bande $0 < \Im z < \omega$ et bornée par $e^{-p\Re z}$ quand $\Re z \rightarrow \pm\infty$ ($p > 0$). Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax} f(x) dx = \frac{2i\pi}{1 - e^{ia\omega}} \sum_k \text{Res}[e^{az} f(z), z_k] \quad (|\Re a| < p) . \quad (4.82)$$

Par exemple :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^x} dx = \pi(\cot \pi a - \cot \pi b) \quad (0 < \Re a, \Re b < 1) . \quad (4.83)$$

4.3 Calcul d'intégrales de fonctions multiformes

Avec des fonctions multiformes, la première opération est de définir proprement la(es) coupure(s). Ceci étant fait, la règle de l'élastique est toujours de vigueur : outre des possibles singularités isolées, la coupure est un mur infranchissable par le contour. Pour illustrer ceci, le mieux est de traiter quelques exemples, où on ne quittera pas le premier feuillet de Riemann. Bien sûr, les méthodes employées s'étendent aux chemins empruntant différents feuillets.

Exemple 1

Soit à calculer l'intégrale²¹ :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx \equiv \int_0^{+\infty} f(x) dx . \quad (4.84)$$

La particularité de l'intégrand de (4.84) est d'être *impair*, et on ne peut donc pas (comme quand il est pair) étendre l'intégration à tout l'axe réel et refermer par un grand cercle d'un côté ou de l'autre. L'astuce consiste à introduire une fonction $\tilde{f}(z)$ nettement différente de $f(z)$ qui est le prolongement analytique immédiat de f au champ complexe.

Considérons l'intégrale :

$$\tilde{I} = \int_C \tilde{f}(z) dz , \quad \tilde{f}(z) = \frac{\ln z}{1+z^3} , \quad (4.85)$$

²⁰D'où, en sous-produit, les égalités :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{\cosh x + 1} dx = \frac{\pi a}{\sinh \pi a} , \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh x + \cosh \alpha} dx = \frac{\alpha}{\sinh \alpha} . \quad (4.81)$$

²¹Même remarque que dans la note 3.

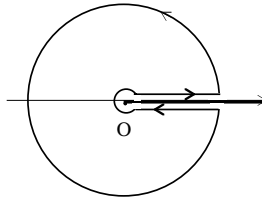


Figure 4.3: Contour utilisé pour l'intégrale (4.85). La coupure est la demi-droite en gras. On fait bien sûr tendre vers l'infini le rayon du grand cercle coupé, et vers zéro celui du petit cercle coupé autour de l'origine.

où $\ln z$ est la branche dont la coupure est la demi-axe \mathbb{R}_+ , et où C est le contour de la figure 4.3. Sur le bord supérieur de la coupure ($z = x + i0$, $x > 0$), la branche de $\ln z$ ainsi définie vaut tout simplement $\ln x \in \mathbb{R}$; partant d'un tel point et faisant faire un tour à z autour de O , on se retrouve sur le bord inférieur de la coupure ($z = x - i0$) et la même branche ainsi suivie par continuité vaut maintenant $\ln x + 2i\pi$. Par le 1^{er} lemme de Jordan, le grand "cercle"²² ne contribue pas à la limite. Quant au petit cercle autour de l'origine, on montre facilement que sa contribution tend vers zéro comme $|z| \ln |z|$ (c'est aussi ce que dit le lemme 2). Il en résulte :

$$\tilde{I} = \int_{\varepsilon=0_+}^{R=\infty} \frac{\ln x}{1+x^3} dx + \int_{R=\infty}^{\varepsilon=0_+} \frac{\ln x + 2i\pi}{1+x^3} dx + \mathcal{O}(0_+ \ln 0_+) = -2i\pi I . \quad (4.86)$$

Par ailleurs, $\tilde{I} = 2i\pi \Sigma \text{Res}$. Dans le contour, il y a trois pôles d'ordre un, les trois racines de $z^3 + 1 = 0$, dont il est facile de calculer les résidus. Le résidu en $z_k = e^{\frac{i}{3}(2k+1)\pi}$ est $\frac{\ln z_k}{3z_k^2} = -\frac{1}{3}z_k \ln z_k$:

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= 2i\pi \sum_{k=0,1,2} (-1) \frac{1}{3} e^{\frac{i}{3}(2k+1)\pi} \ln e^{\frac{i}{3}(2k+1)\pi} = \frac{2\pi^2}{9} \sum_{k=0,1,2} (2k+1) e^{\frac{i}{3}(2k+1)\pi} \\ &= \frac{2\pi^2}{9} [e^{i\frac{\pi}{3}} - 3 + 5e^{-i\frac{\pi}{3}}] = -\frac{4\pi^2 i}{3\sqrt{3}} , \end{aligned} \quad (4.87)$$

d'où, selon (4.86), l'intégrale cherchée $I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Exemple 2

Soit à calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\phi(x)}{\ln^2 x + \pi^2} dx , \quad (4.88)$$

où $\phi(x)$ est une fonction paire, méromorphe, analytique en $z = 0$ et telle que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z\phi(z)| \rightarrow 0$. L'astuce consiste ici à prendre la branche du logarithme dont la coupure est le demi-axe réel négatif, et à considérer :

$$\tilde{I} = \int_C \tilde{f}(z) dz , \quad \tilde{f}(z) = \frac{\phi(z)}{\ln z} , \quad (4.89)$$

où C est le contour de la fig. 4.4.

Sur le bord supérieur de la coupure $z = -x$ où $x \in \mathbb{R}_+$ et $\ln z = \ln x + i\pi$; sur le bord inférieur $\ln z = \ln x - i\pi$. En décomposant le contour en morceaux et omettant d'écrire les contributions du grand "cercle" à l'infini et du petit "cercle" autour de O qui ne comptent pas à la fin²³, il vient :

$$\tilde{I} = \int_{R=+\infty}^{0_+} \frac{\phi(-x)}{\ln x + i\pi} d(-x) + \int_{0_+}^{R=+\infty} \frac{\phi(-x)}{\ln x - i\pi} d(-x) = \int_{0_+}^{R=+\infty} \frac{-2i\pi \phi(x)}{\ln^2 x + \pi^2} dx = -2i\pi I . \quad (4.90)$$

²²Les guillemets sont là pour rappeler que le cercle est coupé d'un point.

²³Le petit cercle de rayon r autour de O donne une contribution en $\frac{r}{\ln r} \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$

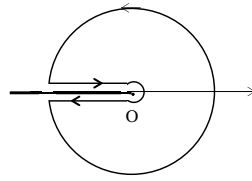


Figure 4.4: Contour utilisé pour l'intégrale (4.89). La coupure est la demi-droite en gras. On fait bien sûr tendre vers l'infini le rayon du grand cercle coupé, et vers zéro celui du petit cercle autour de O.

Par ailleurs, \tilde{I} se trouve par résidus en considérant les pôles z_k de $\phi(z)$:

$$\tilde{I} = 2i\pi \Sigma \operatorname{Res}\left[\frac{\phi(z)}{\ln z}, z_k\right], \quad (4.91)$$

d'où par (4.90) l'intégrale cherchée :

$$I = -\Sigma \operatorname{Res}\left[\frac{\phi(z)}{\ln z}, z_k\right]. \quad (4.92)$$

À titre d'exemple, avec $\phi(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, cette méthode permet d'établir l'égalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} \frac{1}{\ln^2 x + \pi^2} dx = \frac{\pi}{2a} \frac{1}{\ln^2 a + \frac{\pi^2}{4}} \quad (a > 0). \quad (4.93)$$

Notons que si $\phi(x)$ a des pôles sur la coupure, il faut les contourner par deux petits demi-cercles et prendre convenablement la limite du rayon nul.

Exemple 3

Soit maintenant à calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{P(x)} dx, \quad (4.94)$$

où $P(x)$ est un polynôme de degré n fini en $x = 0$ et où $-1 < \alpha < n - 1$. Par les lemmes de Jordan, l'intégrale le long d'un grand cercle de rayon R tend vers zéro si $R \rightarrow +\infty$, tout comme celle le long d'un cercle centré en O dont le rayon tend vers zéro. En prenant le même contour que celui de la figure 4.3, on définit une intégrale \tilde{I} calculable par résidus, et qui est égale à $(1 - e^{2i\pi\alpha})I$. Par le théorème des résidus, on a :

$$\tilde{I} = 2i\pi \Sigma \operatorname{Res}\left[\frac{z^\alpha}{P(z)}, z_k\right]. \quad (4.95)$$

En particulier, si les n zéros de $P(z)$ sont tous des zéros d'ordre 1, tous les pôles de $\frac{1}{P(z)}$ sont d'ordre un et il vient finalement :

$$I = \frac{2i\pi}{1 - e^{2i\pi\alpha}} \sum_{k=1}^n \frac{z_k^\alpha}{P'(z_k)}. \quad (4.96)$$

C'est avec cette astuce que l'on établit par exemple :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^n + 1} dx = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin \frac{\alpha+1}{n}\pi}, \quad (\alpha > -1, n - \alpha > 1). \quad (4.97)$$

L'expression au second membre diverge pour $\alpha \rightarrow -1$ et pour $\alpha \rightarrow n - 1$, comme il se doit²⁴.

²⁴Que se passe-t-il pour $\alpha = -1$? Par ailleurs, quelle est l'expression de l'intégrale si $\alpha \in \mathbb{C}$, avec $-1 < \Re\alpha < n - 1$?

Exemple 4

Soit enfin à calculer l'intégrale :

$$I(\nu) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2\nu}} dx, \quad (4.98)$$

qui ne converge que si $\nu > \frac{1}{2}$. En posant $x^{2\nu} = X$, et en choisissant la branche $x = X^{\frac{1}{2\nu}} e^{2i\frac{\pi}{\nu}}$, $I(\nu)$ s'écrit :

$$I(\nu) = \frac{1}{2\nu} \int_0^{+\infty} \frac{X^\alpha}{1+X} dX, \quad \alpha = \frac{1}{2\nu} - 1, \quad -1 < \alpha < 0. \quad (4.99)$$

En utilisant (4.97) avec $n = 1$, on en déduit :

$$I(\nu) = \frac{\pi}{2\nu} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2\nu}}. \quad (4.100)$$

Il est intéressant de rapprocher ce résultat de (4.32) : on voit que (4.100) généralise (4.32) au cas non-entier. Il ne s'agit pas vraiment d'un prolongement analytique au sens strict, car la quantité I_n définie en (4.29) n'est pas une *fonction analytique* : elle n'est définie²⁵ que pour n entier ! Cette généralisation d'une quantité ponctuelle vers une fonction continue est fréquente ; par exemple, c'est ainsi que la fonction $\Gamma(z)$ d'Euler²⁶ généralise la factorielle : on verra alors que $\Gamma(z = n \in \mathbb{N}^*) = (n-1)!$.

Ce type de généralisation est fréquent en Physique. Il arrive que l'on soit contraint d'introduire des fonctions $f(x)$, alors que le problème physique n'est concerné que par des valeurs données de la variable, entières positives par exemple : x peut être la dimension de l'espace physique, soit usuellement $x = 1, 2, 3$. Le calcul direct de $f(n)$ peut se révéler difficile, voire impossible – et c'est ce qui conduit à considérer des espaces de dimension non-entières, voire négatives (!), et pour quoi pas complexes (!), à calculer $f(x \in \mathbb{R})$, ou $f(z \in \mathbb{C})$, afin, faisant le choix physique en fin de calcul, de trouver la quantité pertinente physiquement.

Un autre exemple : soit à calculer une certaine quantité qui se présente sous la forme²⁷ $F = \ln Z$. On peut trouver F comme :

$$Z = \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{F^\nu - 1}{\nu}. \quad (4.101)$$

Cette relation, triviale telle qu'elle est, un peu absconse même, est à la base d'une méthode puissante utilisée en Mécanique statistique, introduite dans les années 1970 par Parisi (*Méthode des répliques*).

4.4 Calcul de la somme de séries

Il est très utile de savoir calculer la somme de séries $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$, où le terme général peut dépendre d'un paramètre (ou plus généralement être une certaine fonction $u_n(x)$). L'astuce consiste à trouver une fonction ayant une infinité de singularités paramétrable par l'entier n et dénicher le bon contour de façon à faire apparaître la série S au second membre du théorème des résidus quand on l'applique à l'intégrale ainsi construite. Autrement dit, il faut remplir l'équation suivante :

$$\int_{\text{???}} \text{???} dz = 2i\pi (S + \text{autre chose que l'on sait calculer}). \quad (4.102)$$

Pour l'instant, on n'est guère avancé : il faut évidemment savoir calculer l'intégrale au premier membre (quand on aura dit ce qu'elle est), l'idéal étant qu'elle soit nulle...

Tout d'abord, on commence par introduire une fonction $f(z)$ qui est simplement l'expression de u_n en y remplaçant l'entier n par la variable complexe z :

$$u_n \equiv f(n). \quad (4.103)$$

²⁵ \mathbb{N} ne définit pas un *domaine*.

²⁶ voir ch. 5.

²⁷ On devine qu'il est question (à des facteurs près) d'énergie libre, et de fonction de partition.

Il faut ensuite trouver une fonction $\phi(z)$ ayant des singularités (des pôles simples, par exemple) réparties comme \mathbb{N} (ou \mathbb{Z} , en jouant éventuellement avec la parité de $f(n)$), afin de construire à partir de résidus la somme S au second membre de (4.102). Une fonction simple ayant une infinité de pôles simples indexables par $n \in \mathbb{Z}$ est la fonction $\frac{1}{\sin z}$ (tous les pôles sont alors en $z_n = n\pi$ et sont d'ordre un). En prenant plutôt $\frac{1}{\sin \pi z}$, les pôles sont strictement les entiers relatifs. Le résidu correspondant est :

$$\left(\frac{1}{(\sin \pi z)'} \right)_{z=n\pi} = \frac{1}{\pi \cos n\pi} = \frac{(-1)^n}{\pi}, \quad (4.104)$$

ou, ce qui revient au même :

$$\lim_{z \rightarrow n\pi} (z - n\pi) \frac{1}{\sin \pi z} = \lim_{z \rightarrow n\pi} (z - n\pi) \frac{1}{\pi(z - n\pi) \cos n\pi} = \frac{(-1)^n}{\pi}. \quad (4.105)$$

Le signe alternant $(-1)^n$ n'est pas a priori souhaitable pour une série du genre²⁸ $\sum_n u_n$, et le facteur $\frac{1}{\pi}$ cosmétiquement désagréable ; ce qui donne l'idée de considérer la fonction $\pi \cot \pi z$, donnant les mêmes pôles que $\frac{1}{\sin \pi z}$ et ayant un résidu égal à :

$$\lim_{z \rightarrow n\pi} (z - n\pi) \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} = \lim_{z \rightarrow n\pi} (z - n\pi) \frac{\pi \cos \pi z}{\pi(z - n\pi) \cos n\pi} = \frac{\pi(-1)^n}{\pi(-1)^n} = 1. \quad (4.106)$$

En d'autres termes, le $\cos n\pi$ donne lui aussi une alternance de signe, qui vient compenser celle du résidu de $\frac{1}{\sin \pi z}$. Le résultat important ici s'exprime donc comme suit :

$$1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_n} \pi \cot \pi z \, dz = \text{Res}(\pi \cot \pi z, n) \quad (4.107)$$

où γ_n est un petit contour fermé (un petit cercle par exemple) entourant le point d'abscisse entière $n \in \mathbb{Z}$ sur l'axe réel, à l'exclusion de tout autre entier.

Soit maintenant à calculer une série du genre :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n), \quad (4.108)$$

où f est une fonction paire, $f(-n) = f(n)$, n'ayant aucune singularité²⁹ sur \mathbb{Z} , et supposée méromorphe pour simplifier³⁰. On a :

$$S = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \iff \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = 2S - f(0), \quad (4.109)$$

Considérons maintenant des grands contours C_R centrés sur l'origine (carré de côté R , cercle de rayon R, \dots) et soit l'intégrale :

$$I = \int_{C_R} \pi \cot \pi z f(z) \, dz, \quad (4.110)$$

où $f(z)$ est donc le "prolongement analytique" immédiat de la fonction servant de terme général de la série et initialement définie sur les entiers³¹. Plus R est grand, plus grand est le nombre de valeurs entières de n situées dans le contour. Par ailleurs, supposons que $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |zf(z)| = 0$: alors l'intégrale sur le grand contour est

²⁸mais est au contraire ce qu'il faut pour une série alternée $\sum_n (-1)^n u_n$ (voir plus loin p. 18).

²⁹Dans le cas contraire, le terme général de la série ne serait pas défini partout sur \mathbb{Z} .

³⁰Si f a des coupures, il convient de faire un calcul spécifique, dont la recette n'est pas aussi simple mais qui relève des mêmes idées.

³¹Pour ne pas compliquer la discussion de façon inessentielle, on suppose que $f(z)$ est analytique aux pôles de $\cot \pi z$. Dans le cas contraire, le calcul de fait de la même façon, mais en prenant en compte une telle particularité. À titre d'exercice, on cherchera la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2+a^2)}$ et on montrera qu'elle vaut $\frac{\pi^2}{6a^2} - \frac{\pi}{2a^3} \cot \pi a + \frac{1}{2a^4}$ (cette somme se trouve aussi à l'aide de (4.118), et en écrivant $\frac{1}{n^2(n^2+a^2)} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+a^2} \right)$.

nulle à la limite³² (encore un avatar du lemme de Jordan, la fonction $\pi \cot \pi z$ étant bornée à l'infini). Ainsi, après passage à la limite R infini, on voit que :

$$0 = \int_{C_\infty} \pi \cot \pi z f(z) dz ; \quad (4.111)$$

mais par ailleurs, l'application du théorème des résidus donne :

$$\int_{C_\infty} \pi \cot \pi z f(z) dz = 2i\pi \sum_{\text{Res}} \text{Res}[\pi \cot \pi z f(z)] , \quad (4.112)$$

d'où :

$$\sum_{\text{Res}} \text{Res}[\pi \cot \pi z f(z)] = 0 , \quad (4.113)$$

Par hypothèse, la fonction $f(z)$ a des pôles qui, après la limite $R \rightarrow +\infty$, se trouvent forcément à l'intérieur du grand contour³³. En séparant les contributions venant des résidus des pôles de $\pi \cot \pi z$ et celles liées aux pôles z_k de f , il vient :

$$0 = 2i\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) + 2i\pi \sum_k \pi \cot \pi z_k \text{Res}[f(z), z_k] , \quad (4.114)$$

d'où, selon (4.109) :

$$0 = 2i\pi [2S - f(0)] + 2i\pi \sum_k \pi \cot \pi z_k \text{Res}[f(z), z_k] , \quad (4.115)$$

et finalement la somme S cherchée :

$$S = \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2} \sum_k \pi \cot \pi z_k \text{Res}[f(z), z_k] . \quad (4.116)$$

Le calcul de S se réduit donc au calcul des résidus de f ; en pratique, la méthode est efficace quand f a un *petit* nombre de pôles³⁴.

D'ailleurs, le recours à un grand contour étiré à l'infini n'est pas obligatoire, le calcul de la série pouvant s'effectuer différemment. En effet, la relation évidente (voir (4.107)) :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \times 1 = \sum_n \text{Res}[f(z) \pi \cot \pi z, z = n] \quad (4.117)$$

peut se lire autrement, en disant que, par définition du résidu, la série de gauche est égale à la somme des intégrales sur des petits contours fermés (pourquoi pas circulaires) renfermant chacun un et un seul pôle de $\pi \cot \pi z$. Par des déformations continues successives (voir fig. 4.5), le contour devient deux droites situées l'une juste en-dessous, l'autre juste au dessus de l'axe réel. Chacune des intégrales correspondantes se calcule en refermant par un grand demi-cercle et en invoquant le lemme de Jordan.

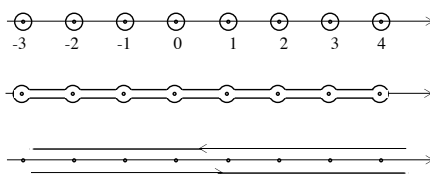


Figure 4.5: Modifications par continuité du contour pour le calcul d'une série du genre (4.108).

³² En pratique, c'est essentiellement dans ce cas que cette méthode astucieuse est utile !

³³ Rappelons que l'on suppose ces pôles distincts de ceux de $\cot \pi z$.

³⁴ ... mais peut aussi servir pour démontrer l'égalité de deux séries, quand f a une infinité de pôles.

D'une façon ou d'une autre, c'est ainsi que l'on peut établir les égalités suivantes³⁵ :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \coth \pi a - \frac{1}{2a^2}, \quad (4.118)$$

et bien d'autres du même genre. Par exemple :

$$\zeta(2) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad (4.119)$$

La fonction $\zeta(z) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^{-z}$ s'appelle *fonction de Riemann*, et joue un rôle fondamental en Mathématiques³⁶ (notamment en Théorie des nombres). On rencontre souvent les sommes $\zeta(z)$ en Physique ($\zeta(4)$ apparaît dans le calcul selon Planck de la constante phénoménologique de Wien, $\zeta(d)$ dans la condensation de Bose en d dimensions, ...).

Pour calculer de séries alternées, impliquant toujours une fonction paire $f(-n) = f(n)$, du genre :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f(n) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} (-1)^n f(n), \quad (4.120)$$

et puisque $\text{Res}[\frac{\pi}{\sin \pi z}, z = n] = (-1)^n$, il suffit de considérer des intégrales du type :

$$I = \int_C \frac{\pi}{\sin \pi z} f(z) dz, \quad (4.121)$$

où le contour C , indiqué sur la fig. 4.6, prend en compte le fait que l'intégrand possède un pôle "de trop" en $z = 0$. Cette intégrale vaut :

$$I = 2i\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \text{Res}[\frac{\pi f(z)}{\sin \pi z}, z = n], \quad (4.122)$$

À nouveau, on invoque le lemme de Jordan pour montrer que les contributions des deux grands demi-cercles

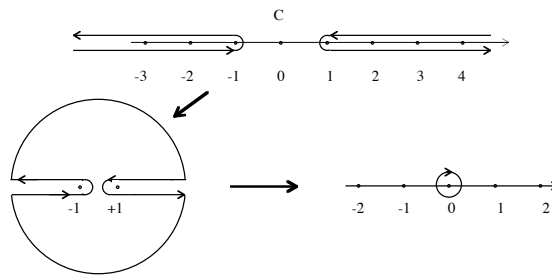


Figure 4.6: Fermeture et déformation du contour pour le calcul d'une série du genre (4.120).

sont nulles. En faisant presque collapser par continuité le contour, on le réduit à un petit cercle autour γ de l'origine parcouru dans le sens *néгатif*, et il vient :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f(n) = \frac{1-1}{2} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\pi}{\sin \pi z} f(z) dz = -\frac{1}{2} \text{Res}[\frac{\pi}{\sin \pi z} f(z), z = 0]. \quad (4.123)$$

³⁵ ces résultats se trouvent aussi par la considération des bonnes séries de Fourier. Par exemple, $\zeta(2)$ s'obtient en sommant les coefficients de Fourier de la fonction $f(x) = x^2, -\pi \leq x \leq +\pi$ et périodisée sur tout \mathbb{R} , après avoir choisi $x = 1$.

³⁶ C'est une fonction à propos de laquelle existe une fameuse conjecture, due précisément à Riemann, selon laquelle tous les zéros z_k de $\zeta(z)$ compris dans la bande $0 \leq z \leq 1$ sont en fait sur la demi-droite verticale d'abscisse $\frac{1}{2}$. À l'heure actuelle, cette conjecture n'est pas démontrée, mais n'a toujours pas été prise en défaut malgré d'énormes calculs rendus possibles par des ordinateurs de plus en plus puissants...

C'est ainsi que l'on peut démontrer l'égalité suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{7\pi^4}{720} , \quad (4.124)$$

après avoir calculé le résidu de $\frac{\pi}{z^4 \sin \pi z}$ à l'origine, qui est le coefficient de $\frac{1}{z}$ de l'expression :

$$\frac{1}{z^5} \left[1 + \left(\frac{\pi^2 z^2}{3!} - \frac{\pi^4 z^4}{5!} \right) + \left(\frac{\pi^2 z^2}{3!} \right)^2 \right] , \quad (4.125)$$

soit $+\frac{7\pi^4}{360}$, d'où (4.124) en vertu de (4.123).

4.5 Calcul d'intégrales impropres

D'une façon générale (et quelque peu vague), on appelle intégrale impropre une intégrale dont la définition exige quelques précautions ou quelques précisions. C'est le cas lorsque l'une ou les borne(s) est (sont) infinie(s). Un autre cas, très fréquent en Physique, est celui où le chemin d'intégration passe par une singularité de l'intégrand. Par exemple, on rencontre souvent des intégrales du type :

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0} dx , \quad (4.126)$$

où x_0 est un réel compris entre a et b . Clairement, l'expression (4.126) n'a pas de sens et il faut lui en donner un ; c'est typiquement ce que l'on appelle une *régularisation*. Les deux types de difficultés peuvent d'ailleurs se présenter simultanément, quand d'une part une(les) borne(s) est(sont) infinie(s), et que d'autre part le chemin d'intégration rencontre une singularité.

Afin de raisonner dans un cas concret (et important en Physique), soit l'intégrale :

$$I(x_0) = \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0} dx \quad (a < x_0 < b) . \quad (4.127)$$

Afin de ne pas mélanger les difficultés, la fonction f est supposée posséder toutes les propriétés pour que la convergence à l'infini de l'intégrale soit assurée sans devoir faire d'acrobaties (par exemple f est supposée décroître assez vite pour que chacun des morceaux à l'infini tende vers zéro indépendamment de l'autre). Finalement, on suppose que le remplacement des bornes par $\pm\infty$ a été antérieurement justifié. Dorénavant, on considère donc :

$$I(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \quad (a < x_0 < b) , \quad (4.128)$$

où l'on peut d'ailleurs sans perte de généralité³⁷ supposer $x_0 = 0$; considérons donc :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx . \quad (4.129)$$

Pour la commodité du raisonnement, la fonction f est supposée n'avoir aucune singularité sur \mathbb{R} (en particulier elle est définie en $x = 0$ où elle vaut $f(0)$). Au total, le seul ennui est la présence de la singularité de l'intégrand en $x = 0$. Si on exclut le petit segment $[-\varepsilon, +\varepsilon']$ et que l'on estime le comportement de l'intégrale amputée \tilde{I} , on voit tout de suite que $\tilde{I} \sim \ln(\varepsilon/\varepsilon')$, de sorte que si on fait tendre vers zéro indépendamment les deux IP ε et ε' , l'intégrale a une divergence de type logarithmique, et peut prendre n'importe quelle valeur réelle selon la façon dont sont prises les deux limites. En revanche, si on prend $\varepsilon = \varepsilon'$, on ampute l'intégrale de deux segments symétriques³⁸ de part et d'autre de l'origine, les aires algébriques se compensent et la limite de

³⁷Il suffit de faire le changement de variable $x' = x - x_0$!

³⁸À condition que ε soit suffisamment petit, seule importe la valeur de f en $x = 0$, et les deux aires sont bien égales en valeur absolue, quelle que soit l'éventuelle asymétrie de $f(x)$ dans un plus grand voisinage de l'origine.

l'intégrale tronquée existe, aussi petit que soit ε . À la limite $\varepsilon = 0_+$ ceci est très exactement la définition d'une régularisation particulière appelée *partie principale de Cauchy*, et ici notée \mathcal{P} ou f , la petite barre évoquant que l'on a "enlevé un point" – et pas n'importe comment :

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \quad (\varepsilon > 0) . \quad (4.130)$$

Comment se traduit une telle opération en terme d'une intégrale dans le plan complexe ? Pour fixer les idées,

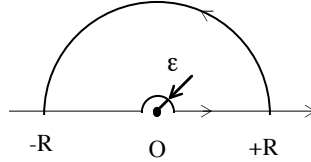


Figure 4.7: Contour utilisé pour illustrer la définition (4.130) de la partie principale.

supposons que la fonction $f(z)$ est telle que l'on peut calculer par résidus en refermant le contour par le grand demi-cercle supérieur dont la contribution est nulle à la limite (par exemple quand $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |zf(z)| \rightarrow 0$), et considérons l'intégrale sur le contour dessiné sur la fig. 4.7 ; elle s'écrit, désignant par ... la contribution du grand demi-cercle supposée nulle à la limite R infini :

$$\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+R} \right) \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\pi}^0 d(\varepsilon e^{i\theta}) \frac{f(\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} + \dots . \quad (4.131)$$

et vaut $2i\pi \sum_k \text{Res} \left[\frac{f(z)}{z}, z_k \right]$ où les z_k désignent les pôles de $f(z)$ ayant une partie imaginaire strictement positive³⁹. Après simplification dans l'intégrale sur le petit demi-cercle autour de l'origine, il vient :

$$\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+R} \right) \frac{f(x)}{x} dx + i \int_{\pi}^0 d\theta f(\varepsilon e^{i\theta}) + \dots = 2i\pi \sum_k \text{Res} \left[\frac{f(z)}{z}, z_k \right] . \quad (4.132)$$

Comme $f(0)$ existe, dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, $R \rightarrow +\infty$ il vient simplement :

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx + i f(z=0) \int_{\pi}^0 d\theta = 2i\pi \sum_k \text{Res} \left[\frac{f(z)}{z}, z_k \right] . \quad (4.133)$$

soit :

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx + i(-\pi)f(0) = 2i\pi \sum_k \text{Res} \left[\frac{f(z)}{z}, z_k \right] \quad (\Im z_k > 0) . \quad (4.134)$$

Bien sûr, on peut refaire le même calcul en fermant dans le demi-plan inférieur ; on trouve alors :

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx + i(+\pi)f(0) = -2i\pi \sum_k \text{Res} \left[\frac{f(z)}{z}, z_k \right] \quad (\Im z_k < 0) ; \quad (4.135)$$

en rapprochant les deux expressions (4.134) et (4.135) de $\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$, on obtient :

$$\sum_k \text{Res} \left[\frac{f(z)}{z}, z_k \right] = 0 , \quad (4.136)$$

où la somme porte sur *tous* les résidus, que les pôles soient en haut ou en bas : comme le résidu à l'infini est ici nul, on retrouve le résultat général, affirmant que la somme de tous les résidus est nulle.

En translatant tout de x_0 , on déduit de (4.134) la relation plus générale⁴⁰ :

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = -i\pi f(x_0) + 2i\pi \sum_k \text{Res} \left[\frac{f(z)}{z}, z_k \right] \quad (\Im z_k > 0) . \quad (4.137)$$

³⁹Rappelons que, par hypothèse, $f(z)$ n'a pas de singularité sur l'axe réel.

⁴⁰Bien sûr, c'est maintenant le point x_0 que l'on "retire" de l'intégrale, en extrayant le segment $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.

En particulier, si f n'a pas de pôle dans le demi-plan supérieur, il vient simplement⁴¹ :

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = i\pi f(x_0) \quad (f(z) \text{ analytique dans le demi-plan supérieur}) . \quad (4.138)$$

Cette relation établit une dépendance très importante et très forte entre la partie principale et les propriétés analytiques de $f(z)$ (dans le cas discuté ici, l'absence de pôles dans le demi-plan supérieur). En outre, en séparant f en ses parties réelle et imaginaire :

$$f(z) = f_1(z) + if_2(z) , \quad (4.139)$$

on obtient les deux relations :

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(x)}{x - x_0} dx = -\pi f_2(x_0) , \quad \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(x)}{x - x_0} dx = \pi f_1(x_0) . \quad (4.140)$$

En Physique, de telles relations⁴² portent le nom de *Relations de Kramers - Kronig*. Elles jouent un rôle essentiel pour analyser la réponse d'un système, décrite par sa *susceptibilité*, et permettent ainsi de remonter à la dynamique interne de ce système. Enfin, on verra (et tout se tient) que l'absence de pôles dans un demi-plan pour la susceptibilité traduit un principe physique immuable, le Principe de causalité.

⁴¹Le résultat (4.138) peut se lire comme une sorte de formule de Cauchy où, comme le pôle est sur le contour, il faut prendre seulement – quand on régularise au sens de Cauchy – la *moitié* du résidu ($i\pi$ au lieu de $2i\pi$ au second membre).

⁴²Le plus souvent, elles apparaissent lors de l'étude de la susceptibilité χ en fonction de la pulsation ω ; en transcrivant les notations, on a :

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = i\pi\chi(\omega_0) \quad (\chi(\omega) \text{ analytique dans le demi-plan supérieur}) . \quad (4.141)$$