Les puissances de 10

Les puissances de 10 sont très utilisées en sciences physiques. Elles permettent de simplifier les écritures et les calculs. Elles donnent également rapidement accès à un ordre de grandeur de la valeur considérée.

1 – En mathématiques

Pour tous nombres a et b $\in \mathbb{Z}$, on a les quatre relation suivantes.

$$10^a \times 10^b = 10^{a+b} \qquad \left(10^a\right)^b = 10^{a\times b}$$

$$10^{-a} = \frac{1}{10^a} \qquad \frac{10^a}{10^b} = 10^{a-b}$$

2 – Des préfixes bien commodes

2.1 – Les sous-multiples (sur l'exemple de la longueur)

Nom	mètre	millimètre	micromètre	nanomètre	picomètre	femtomètre
Valeur (en m)	1 m	10^{-3} m	10^{-6} m	10^{-9} m	10^{-12} m	10^{-15} m
symbole	m	mm	µm	nm	pm	fm

2.2 – Les multiples (sur l'exemple de la longueur)

Nom	pétamètre	téramètre	gigamètre	mégamètre	kilomètre	mètre
Valeur (en m)	10^{15} m	10^{12} m	10^{9} m	10^{6} m	10^{3} m	1 m
symbole	Pm	Tm	Gm	Mm	km	m

3 – L'écriture scientifique

Ecrire un nombre en notation scientifique, c'est exprimer sa valeur numérique sous la forme $a.10^n$, avec $a \in \mathbb{R}$ compris entre 1 et 9 et $n \in \mathbb{Z}$ (entier positif ou négatif).

✓ *Cas d'un nombre plus grand que 10 (n > 0)*

On obtient **a** en déplaçant la virgule jusqu'au premier chiffre non nul ; **n** est alors le nombre de fois dont il a fallu déplacer la virgule.

→ *par exemple, dans 185 003, « 1 » est le premier chiffre non nul (a = 1) et il y a 5 chiffres (85 003) après le « 1 » donc n = 5. Ce nombre s'écrit donc 1,850 03.10^5 en notation scientifique.*

→ *par exemple, 22 005,3 s'écrit 2,200 53.10^4 en notation scientifique.*

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a} \quad , \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

✓ *Cas d'un nombre plus petit que 1 (n < 0)*

On obtient cette fois l'expression de **a** en déplaçant la virgule vers la droite jusqu'au premier chiffre non nul. Le nombre de fois dont il a fallu déplacer la virgule, *affecté d'un signe –*, est le nombre **n** (négatif cette fois).

→ *par exemple, 0,000 258 s'écrit 2,58.10^{-4} en notation scientifique : il a fallu déplacer la virgule 4 fois jusqu'au premier chiffre non nul, 2.*

4 – Les conversions

La notation scientifique est particulièrement bien adaptée pour effectuer les **conversions**.

- *Pour passer d'un multiple à l'unité correspondante*, il faut multiplier la valeur de la grandeur par la puissance de 10 associée à ce multiple

  $\rightarrow$ *pour convertir* $4{,}20.10^8\ \Omega$ *en* $M\Omega$*, on écrit*

  $R = 4{,}20.10^8\ \Omega$
  $= 4{,}20.10^{6+2}\ \Omega$
  $= 4{,}20.10^2\ M\Omega = 420\ M\Omega$

- *Pour passer d'une unité à un multiple*, il faut faire apparaître dans l'écriture du nombre la puissance de 10 correspondant u multiple approprié.

  $\rightarrow$ *pour convertir 1,5 nm en m, on multiplie 1,5 par le* 10^{-9} *correspondant au sous-multiple « nano »*

  $1{,}5\ nm = 1{,}5 \times 10^{-9}\ m = 1{,}5.10^{-9}\ m$

- *Pour passer d'un multiple à l'autre*, il faut en principe repasser par l'unité.

  $\rightarrow$ *pour convertir* $8{,}3.10^5$ *ng en mg, on effectue la manipulation suivante*

  $m = 8{,}3.10^5 \times 10^{-9}\ g$
  $= 8{,}3.10^{5-9} g$
  $= 8{,}3.10^{-4}\ g$
  $= 8{,}3.10^{-6+2}\ g$
  $= 8{,}3.10^2\ \mu g$

Dans un calcul, les grandeurs de même type (longueur, masse, durée …) doivent être exprimées dans la même unité ou dans le même (sous-)multiple.

$\rightarrow$ Pour additionner ou soustraire des valeurs numériques entre elles, elle doivent

- ✓ correspondre à la même grandeur physique (temps, longueur, masse …)
- ✓ être exprimées dans la même unité ou son (sous-)multiple

  $\rightarrow$ *pour calculer* $L = x+h$ *avec* $x = 4{,}50\ m$ *et* $h = 280\ mm$*, on peut convertir x en mm :* $x = 4{,}50.10^3\ mm = 4500\ mm$*. Ainsi,*

  $$L = 4500 + 280 = 4780\ mm = 4{,}78.10^3\ mm = 4{,}78\ m.$$

$\rightarrow$ L'unité d'un produit (multiplication) ou d'un quotient (division) de deux grandeurs est respectivement égale au produit ou au quotient des unités des grandeurs qu'on multiplie ou divise.

$\rightarrow$ *le calcul d'une masse volumique* $\rho = m / V$ *montre qu'une masse volumique s'exprime légalement en* kg / m^{-3}*, soit en* $kg.m^{-3}$.

Remarque : cas des conversions « multiples »

- Aires et volumes

Les unités d'aire sont des unités de longueur élevées au carré (puissance 2), et les unités de volume sont des unités de longueur élevées au cube (puissance 3).

Pour convertir des aires ou des volumes, on procède de la même manière que pour les longueurs, en tenant compte du carré ou du cube.

$\rightarrow$ *pour convertir* $5{,}1.10^4\ mm^3$ *en* m^3*, on écrit*

$$V = 5{,}1.10^4\ (10^{-3}\ m)^3$$
$$= 5{,}1.10^4.10^{-9}\ m^3$$
$$= 5{,}1.10^{-5}\ m^3$$

Dans le système international (SI), l'unité de volume est le mètre-cube (m^3) ; cependant, en physique et en chimie, les volumes sont couramment exprimés en litres (L majuscule), en gardant à l'esprit que

1 L équivaut à 1 dm³

→ $V = 5{,}2.10^{-1}\ L = 5{,}2.10^{-1}\ dm^3 = 5{,}2.10^{-1}\ (10^{-1}\ m)^3 = 5{,}2.10^{-4}\ m^3$

- <u>Unités composées</u>

Pour convertir une grandeur possédant une unité composée, il faut simplement remplacer chaque unité par son expression dans l'unité voulue, puis travailler sur les puissances.

→ *pour une vitesse* $v = 90\ km.h^{-1}$ *à convertir en* $m.s^{-1}$*, on écrit*

$$v = 90\ km.h^{-1} = 90\ (10^3\ m).(3600\ s)^{-1} = \frac{90.10^3}{3600}\ m.s^{-1} = 25\ m.s^{-1}$$

5 – L'ordre de grandeur

La notation scientifique $a.10^n$ permet également d'identifier **l'ordre de grandeur** d'une mesure : l'ordre de grandeur est 10^n si $1 < a < 5$ et 10^{n+1} si $5 \leq a < 10$.

→ *la distance moyenne Terre-Soleil, estimée à 150 millions de kilomètres, est de l'ordre de* $150.10^6 = 1{,}50.10^8 \sim 10^8$ *km soit* 10^{11} *m. On peut ainsi la comparer rapidement à la distance entre Amboise et Tours, de l'ordre de 25 km soit* 10^4 *m : le Soleil est* 10^7 *= 10 millions de fois plus éloigné de la Terre qu'Amboise de Tours !*