Quelques situations relativistes

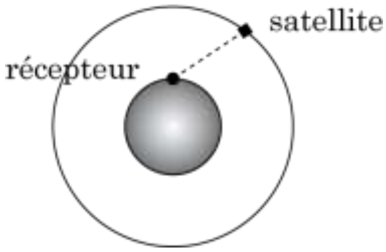
1ère partie : Comment les muons peuvent-ils traverser l'atmosphère ?

Le muon est une particule qui porte la même charge électrique que l'électron, mais avec une masse 207 fois plus grande, c'est pourquoi on l'appelle aussi électron lourd.
Les muons sont produits par l'interaction entre les rayons cosmiques émis par le Soleil et la haute atmosphère de la Terre, à une altitude d'environ 10 km.
Un muon au repos se désintègre en moyenne au bout d'une durée de valeur τ = 2,2 µs. Les muons émis dans la haute atmosphère le sont avec une vitesse égale à 99,8 % de la célérité de la lumière dans le vide.
On considère souvent que le fait de pouvoir détecter des muons à la surface de la Terre est une preuve expérimentale de la dilatation des durées. Cette partie propose de comprendre cette affirmation.

1. Calculer la distance parcourue par un muon pendant 2,2 µs.
2. Pourquoi le fait que des muons parviennent à la surface de la Terre est-il une preuve expérimentale de la dilatation des durées ?
3. En tenant compte de la dilatation des durées, calculer la distance que parcourt, en moyenne, un muon, avant de se désintégrer. On prendra bien soin de définir les événements considérés et durée propres et durée mesurée depuis la Terre. Montrer que ce calcul permet d'interpréter le fait de pouvoir détecter des muons à la surface de la Terre.

2ème partie : « sans la relativité, pas de GPS ! »

Le système de positionnement GPS (global positioning system) repose sur un principe que l'on peut résumer ainsi :



> Des satellites en orbite circulaire gravitent autour de la Terre à plus de vingt mille kilomètres d'altitude, à une vitesse d'environ quatorze mille kilomètres par heure.
> Chaque satellite possède une horloge atomique embarquée et émet des signaux électromagnétiques qui contiennent des informations sur la position et la date exacte où ils ont été émis.
> Un récepteur GPS, au sol, doit recevoir au moins quatre signaux de quatre satellites différents pour pouvoir se localiser. Alors la comparaison de la date de réception et de la date d'émission permet au récepteur de calculer la distance qui le sépare de chaque satellite. Grâce à un calcul appelé « triangulation », il peut ainsi déterminer sa position sur le sol terrestre.

Questions :

1. Estimer un ordre de grandeur de la précision avec laquelle un GPS permet de se localiser.
2. Le mouvement du satellite n'étant pas rectiligne, on admettra que le temps propre est défini par l'horloge embarquée à bord du satellite.
   Expliquer comment la relativité prévoit que l'horloge atomique embarquée à bord du GPS retarde par rapport à la même horloge restée au sol.
3. Calculer le retard τ accumulé en une journée terrestre par l'horloge embarquée à cause de l'effet relativiste évoqué à la question précédente.
4. Calculer l'erreur Δd faite par le récepteur GPS s'il calcule la distance qui le sépare du satellite sans tenir compte du retard pris par son horloge au bout d'une journée. À votre avis, peut-on considérer Δd comme « négligeable » ?

5. *Einstein a publié, en 1915, la relativité générale. Cette théorie, comme son nom l'indique, généralise la relativité restreinte à toutes les situations. En particulier cette théorie montre que le champ de pesanteur terrestre est lui aussi responsable d'un décalage entre l'horloge embarquée et celle restée au sol. Ce décalage est contraire à celui dû à la vitesse du satellite (calculé en (c)). On montre que le champ de pesanteur terrestre est responsable chaque jour d'une avance de 45 µs de l'horloge embarquée par rapport à celle restée au sol.*

En tenant compte des deux effets relativistes, calculer le décalage temporel total T entre les deux horloges accumulé en une journée. En déduire l'erreur Δd_{tot} commise par le récepteur GPS s'il ne tient pas compte des effets relativistes. Montrer que ce calcul justifie la nécessité de prendre en compte la relativité pour concevoir un récepteur GPS.

CORRECTION DES QUESTIONS

1ère partie : Comment les muons peuvent-ils traverser l'atmosphère ?

1. Calculer la distance parcourue par un muon pendant 2,2 µs.
   → $d = v \times \tau = 0{,}998 \times c \times \tau = 659$ m

2. Pourquoi le fait que des muons parviennent à la surface de la Terre est-il une preuve expérimentale de la dilatation des durées ?
   → Les muons sont produits à au moins 10 km de la surface de la Terre. La distance moyenne qu'ils parcourraient par rapport à la terre, si, dans le référentiel terrestre, leur durée de vie moyenne valait 2,2 µs est de 659 m.
   Or des muons parviennent à la surface de la Terre, donc franchissent une distance beaucoup plus élevée : cela est compatible avec l'idée selon laquelle, vus de la Terre, leur durée de vie moyenne, lorsqu'ils sont en mouvement, se dilate.
3. En tenant compte de la dilatation des durées, calculer la distance que parcourt, en moyenne, un muon, avant de se désintégrer. On prendra bien soin de définir les événements considérés et de distinguer durée propre et durée mesurée depuis la Terre. Montrer que ce calcul permet d'interpréter le fait de pouvoir détecter des muons à la surface de la Terre.
   → On étudie les événements « production d'un muon » et « désintégration du même muon ». La durée propre qui sépare ces deux événements est, en moyenne, la durée de vie moyenne d'un muon **au repos**, soit :
   $$\Delta t_p = \mathbf{2{,}2\ \mu s}$$
   Lorsque les muons sont en mouvement, leur durée de vie moyenne mesurée depuis la Terre se dilate et vaut :
   $$\Delta t_m = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2{,}2}{\sqrt{1-0{,}998^2}} = \mathbf{35\ \mu s}$$
   La distance moyenne parcourue par le muon entre son émission et sa désintégration vaut donc, mesurée depuis la Terre :
   $$d' = v \times \Delta t_m = 0{,}998 \times c \times \Delta t_m = 1{,}0 \times 104 \text{ m} = \mathbf{10\ km}$$
   Cette distance permet d'interpréter que les muons peuvent franchir une distance assez grande dans l'atmosphère pour que nous puissions les détecter au sol.

2ème partie : « sans la relativité, pas de GPS ! »

1. À partir de vos connaissances courantes sur le GPS, indiquer un ordre de grandeur de la précision avec laquelle un GPS permet de se localiser.
   → Un GPS embarqué en voiture permet de déterminer une position à la rue près : cela montre qu'il nous localise **à moins de 10 m près**.

2. Le mouvement du satellite n'étant pas rectiligne, on admettra que le temps propre est défini par l'horloge embarquée à bord du satellite.
   Expliquer comment la relativité prévoit que l'horloge atomique embarquée à bord du GPS retarde par rapport à la même horloge restée au sol.
   → Considérons deux événements localisés en un même point du satellite, séparés par une durée propre de valeur Δt_p, mesurée par l'horloge embarquée.
   La durée entre ces mêmes événements mesurée par une horloge liée au sol terrestre vaut :
   $$\Delta t_m = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\text{Donc } \Delta t_p = \Delta t_m \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < \Delta t_m$$

La durée mesurée par l'horloge embarquée est donc plus faible : **elle retarde** par rapport à celle restée au sol.

3. Calculer le retard τ accumulé en une journée terrestre par l'horloge embarquée à cause de l'effet relativiste évoqué à la question précédente.

→ τ est la différence entre Δt_p et Δt_m, soit :

$$\tau = \Delta t_p - \Delta t_m = \Delta t_m \left\{ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - 1 \right\}$$

AN :

- Δt_m est la durée du jour terrestre : 24 × 3600 = 86 400 s.
- v est la vitesse du satellite par rapport au sol :
  $v = 1{,}4 \times 10^4\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$
  $= \dfrac{1{,}4 \times 10^4}{3600} \times 1000 = 3{,}9 \times 10^3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

D'où :

$$\tau = 86400 \times \left(\sqrt{1-\left(\frac{3{,}9\times10^3}{3{,}00\times10^8}\right)^2} - 1 \right) = \mathbf{-7{,}3 \times 10^{-6}\ s}$$ (voir les remarques en fin de correction)

L'horloge embarquée retarde de 7,3 µs par jour.

4. Calculer l'erreur Δd faite par le récepteur GPS s'il calcule la distance qui le sépare du satellite sans tenir compte du retard pris par son horloge au bout d'une journée. À votre avis, peut-on considérer Δd comme « négligeable » ?

→ L'erreur commise par le récepteur s'il ne tient pas compte de la dilatation des durées est la distance parcourue par le signal pendant 7,3 µs. Or les signaux sont de nature électromagnétique, donc se propagent avec la même célérité que la lumière dans le vide.
L'erreur de distance vaut donc :

$$\Delta d = |c\tau| = 3{,}00 \times 10^8 \times 7{,}3 \times 10^{-6} = \mathbf{2{,}2 \times 10^3\ m}.$$

L'erreur commise si on ne tient pas compte des effets relativistes est donc de plus de 2 km ! Or comme nous l'avons indiqué en (b), la précision du GPS est de quelques mètres : on ne peut donc en aucun cas négliger Δd.

5. En tenant compte des deux effets relativistes, calculer le décalage temporel total T entre les deux horloges accumulé en une journée. En déduire l'erreur Δd_{tot} commise par le récepteur GPS s'il ne tient pas compte des effets relativistes. Montrer que ce calcul justifie la nécessité de prendre en compte la relativité pour concevoir un récepteur GPS.

→ Le décalage temporel entre les deux horloges, vaut, au total :
T = 45 – 7,3 = 38 µs
L'erreur totale commise sur un calcul de distance vaut donc :

$$\Delta d_{tot} = |cT| = 3{,}00 \times 10^8 \times 38 \times 10^{-6} = \mathbf{1{,}1 \times 10^4\ m = 11\ km}$$

11 km est une erreur colossale, vu la précision attendue d'un GPS (à peine quelques mètres, comme nous l'avons indiqué en (a)). ceci confirme que les corrections relativistes sont indispensables à la réalisation du système GPS.

Remarque : utilisation de la calculatrice dans le calcul $\tau = 86400 \times \left(\sqrt{1-\left(\frac{3{,}9\times10^3}{3{,}00\times10^8}\right)^2} - 1 \right)$

La précision des calculatrices standard n'est pas toujours suffisante pour obtenir un résultat significatif. Pour vous en convaincre, il suffit d'en tester plusieurs.

Emulateur TI : http://www.ticalc.org/archives/files/fileinfo/84/8442.html

ROMs TI : http://tiemulation.kegtux.org/ROMS.htm

Par ailleurs, on montre en mathématiques (développements limités) que, pour ε petit, $\sqrt{1-\varepsilon} \approx 1-\frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi, $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \approx 1-\frac{v^2}{2c^2}$ et le calcul précédent devient

$$\tau = 86400 \times \left(\sqrt{1-\left(\frac{3,9\times 10^3}{3,00\times 10^8}\right)^2}\right) \approx 86400 \times \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{3,9\times 10^3}{3,00\times 10^8}\right)^2\right]$$