Mécanique céleste
Mouvements satellitaires

Tout le génie de Newton réside dans la formulation d'une loi universelle, régissant tant les phénomènes « sublunaires et corrompus » sur Terre que le ballet des astres dans le ciel. Cette universalité a d'ailleurs été un tournant majeur dans l'histoire de l'humanité.

1 – Satellites en mouvement circulaire

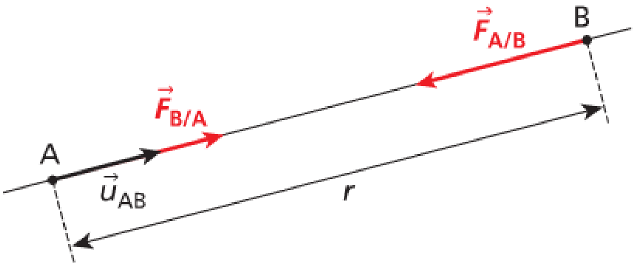
1.1 – Attraction gravitationnelle

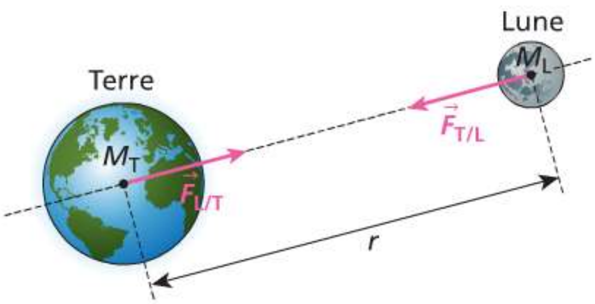
En 1666, Newton énonça la loi d'attraction gravitationnelle

Deux corps ponctuels A et B de masses m_A et m_B, exercent l'un sur l'autre des forces d'attraction opposées vérifiant

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = -G\frac{m_A m_B}{r^2}\vec{u}_{AB}$$

Avec r = AB et $\vec{u}_{AB}$ un vecteur unitaire parallèle à (AB), dirigé de A vers B.
La constante de gravitation universelle G vaut
$G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m².kg⁻².





Cette loi reste valable pour des corps à répartition sphérique de masse, ou suffisamment éloignés l'un de l'autre ; c'est le cas du Soleil, des planètes et de leurs satellites, ainsi que des étoiles.

1.2 – Vitesse d'un satellite en orbite circulaire

Un satellite S de masse m est en mouvement circulaire autour d'un astre central de centre O et de masse M. L'étude est faite dans le référentiel astrocentrique : géocentrique pour les satellites terrestres, héliocentrique pour les planètes. Ce référentiel est considéré comme galiléen.
La seule force subie par le satellite est l'attraction gravitationnelle de l'astre central – l'influence des autres corps célestes est négligée.
En notant r = OS la distance entre le satellite et le centre de l'astre attracteur, la deuxième loi de Newton s'écrit

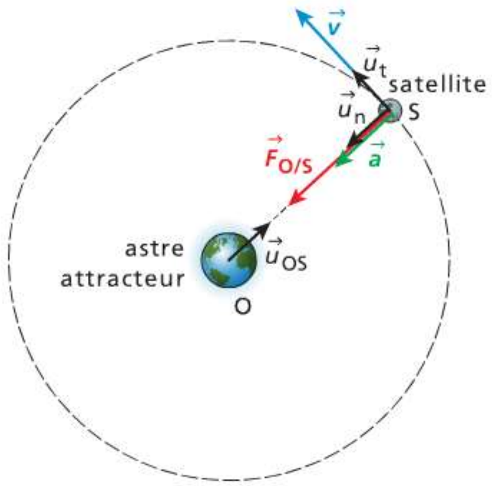
$$m\vec{a} = \vec{F}_{O/S} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_{OS}$$

L'accélération du satellite est donc $\vec{a} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_{OS}$: elle ne dépend que de la masse M de l'attracteur et de la distance r. Dans le repère de Frénet, l'accélération s'écrit

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{r}\vec{u}_n$$

Puisque la trajectoire du satellite est circulaire, le vecteur $\overrightarrow{u_{OS}}$ et le vecteur $\overrightarrow{u_n}$ sont opposés. La force de gravitation est donc uniquement dirigée selon la direction normale, et

- Selon $\overrightarrow{u_t}$, $\frac{dv}{dt} = 0$: le mouvement circulaire d'un satellite est donc uniforme.
- Selon $\overrightarrow{u_n}$, $\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$: la vitesse du satellite s'écrit $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$



1.3 – Période de révolution

La longueur de l'orbite du satellite est le périmètre du cercle, p = 2πr.
Ainsi, la période T de révolution du satellite est la durée de parcours d'un cercle de périmètre p = 2πr, à la vitesse constante v. Elle vérifie

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Son expression se déduit de celle de la vitesse,

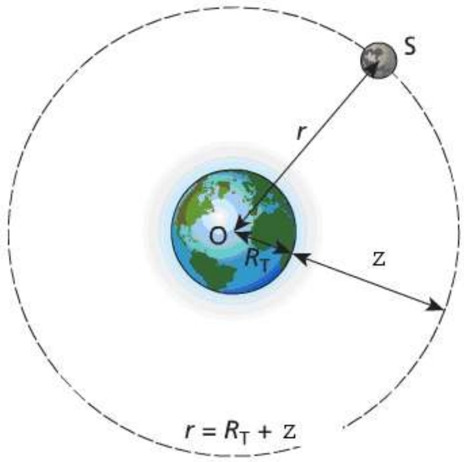
$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

1.4 – Application aux satellites terrestres

Les résultats généraux précédents s'appliquent aux satellites de la Terre en mouvement circulaire : leur mouvement dans le référentiel géocentrique est uniforme. En introduisant leur altitude z au-dessus du sol terrestre et R_T le rayon terrestre, il vient $r = R_T + z$.

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + z}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + z)^3}{GM_T}}$$



La période de révolution d'un satellite croît avec son altitude au-dessus du sol terrestre. Pour une attitude donnée, elle est égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même, le jour sidéral T = 86 164 s. Un tel satellite est qualifié de géosynchrone, puisqu'il revient chaque jour à la même position par rapport à la Terre.
Si de plus il est dans le plan de l'équateur, il reste en permanence au-dessus du même point de la surface terrestre : ainsi fixe dans le référentiel terrestre, il est alors qualifié de géostationnaire.

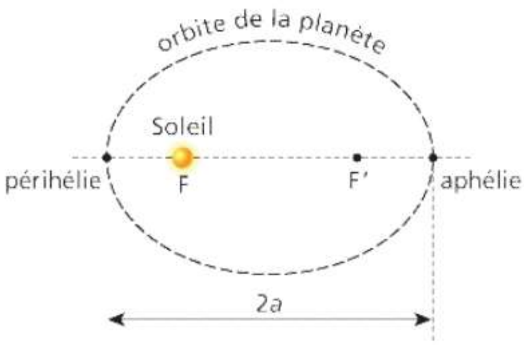
Exercice : calculer l'altitude et la vitesse géostationnaires.
Réponses : z = $3{,}6.10^4$ km ; v = $3{,}1.10^3$ m.s^{-1}.

2 – Généralités sur les mouvements satellitaires

Le mouvement d'un satellite ou d'une planète est décrit, dans le cas général, par les trois lois de Kepler. Elles ont été historiquement énoncées dans le cas du mouvement des planètes autour du Soleil, mais elles s'appliquent également à un satellite en orbite autour d'une planète.
Dans tout ce qui suit, « planète » peut être remplacé par « satellite » et « Soleil » par « astre attracteur ».

2.1 – Première loi de Kepler : loi des orbites

Les planètes décrivent autour du Soleil des ellipses dont le Soleil est l'un des foyers.
La distance Soleil-planète n'est pas constante ; la position la plus proche du Soleil est le périhélie, la plus éloignée l'aphélie.

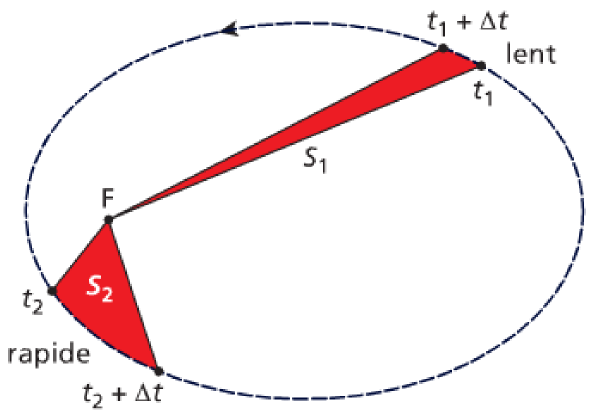


Une ellipse est une courbe fermée caractérisée par deux points F et F' appelés foyers, et par une distance a appelée demi-grand axe – le grand-axe étant le segment reliant périhélie et aphélie.
Dans le cas d'une ellipse très peu aplatie (de faible excentricité), l'oribte de la planète peut être considérée comme un cercle dont le Soleil est le centre : c'est le cas pour la plupart des planètes du système solaire, hormis Mars et Mercure. Les comètes, elles, ont une orbite très aplatie.

2.2 – Deuxième loi de Kepler : loi des aires

Le segment de droite (ou rayon vecteur) reliant le Soleil à la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

L'aire balayée est délimitée par l'arc de l'orbite parcouru par la planète et les deux segments de droite. Pour un même intervalle de temps Δt, ces aires sont égales pour n'importe quelle position de la planète sur son orbite.
Ainsi, plus la planète est proche du Soleil, et plus sa vitesse est élevée ; inversement, une planète va de moins en moins vite si elles s'éloigne du Soleil.



NB : cette loi permet de montre qu'un mouvement circulaire est nécessairement uniforme.

2.3 – Troisième loi de Kepler : loi des périodes

Le quotient du carré de la période de révolution T par le cube du demi-grand axe orbital a est le même pour toutes les planètes du système solaire.

$$\frac{T^2}{a^3} = cste$$

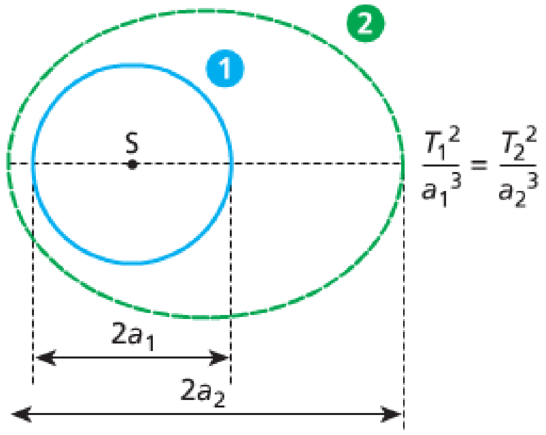
Dans le cas particulier d'une planète en mouvement circulaire de rayon r, nous avons montré au 1.3 que

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{GM_S}}$ où MS est la masse du Soleil.

Ainsi,

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

Puisque ce rapport ne dépend pas de la planète, sa valeur est connue et constante pour toute planète en orbite autour du Soleil.



Exercice : sachant que la Terre orbite en moyenne à 149,6 millions de km du Soleil, déterminer la masse du Soleil.

2.4 – Mouvement de la Terre autour du Soleil

L'orbite de la Terre est une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers. La distance entre Terre et Soleil n'est donc pas constante : elle varie entre 147,1 millions de km (passage au périhélie début janvier) et 152,1 millions de km (passage à l'aphélie début juillet), pour un rayon orbital moyen de 149,6 millions de km. L'écart étant faible, l'excentricité de l'orbite terrestre est faible et cette dernière peut être considéré comme circulaire avec une bonne approximation.
L'orbite de révolution terrestre est contenue dans un plan appelé écliptique ; la Terre effectue également une rotation sur elle-même autour de l'axe des ses pôles, incliné de 23° par rapport à la normale à l'écliptique. Cette inclinaison explique l'alternance des saisons : selon les positions de la Terre sur son orbite, les rayons du Soleil arrivent plus ou moins inclinés au même endroit,

- s'ils arrivent très inclinés, l'hémisphère considéré est en hiver
- s'ils arrivent peu inclinés, l'hémisphère considéré est en été