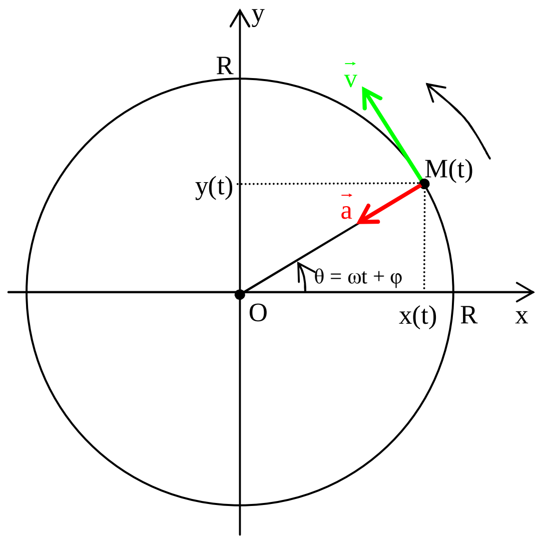
Accélération d'un point en mouvement circulaire uniforme



Un point M en mouvement circulaire uniforme se déplace sur un cercle de rayon R à vitesse v constante.

Sa vitesse angulaire ω est donc aussi constante.

L'angle $\theta = \left(\widehat{Ox, OM}\right)$ peut se mettre sous la forme : $\theta = \omega.t + \varphi$

avec : $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ (cf. cours 1ère S).

<u>Les coordonnées du point M ont donc pour expression</u> :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = R.\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}.t + \varphi\right) \\ y = R.\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}.t + \varphi\right) \end{cases}$$

<u>et le vecteur vitesse est obtenu par dérivation</u> :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \begin{cases} v_x = dx/dt = -R\dfrac{2\pi}{T}.\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}.t + \varphi\right) \\ v_y = dy/dt = R\dfrac{2\pi}{T}.\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}.t + \varphi\right) \end{cases}$$

<u>d'où le vecteur accélération</u> :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \begin{cases} a_x = dv_x/dt = -R\dfrac{4\pi^2}{T^2}.\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}.t + \varphi\right) \\ a_y = dv_y/dt = -R\dfrac{4\pi^2}{T^2}.\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}.t + \varphi\right) \end{cases}$$

Remarque : $\vec{a}$ est radial et centripète

et sa norme vaut :

$$a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \sqrt{R^2\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 \underbrace{\left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}.t + \varphi\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}.t + \varphi\right)\right)}_{=1}} = R\frac{4\pi^2}{T^2} \quad ①$$

Pendant la durée T, le point M parcourt le périmètre du cercle : $2\pi R$ d'où $v = \dfrac{\text{distance}}{\text{durée}} = \dfrac{2\pi R}{T}$ soit $T = \dfrac{2\pi R}{v}$ ②

En remplaçant dans ① :

$$a = R\frac{4\pi^2}{T^2} = R4\pi^2\frac{v^2}{4\pi^2 R^2} = \frac{v^2}{R}$$

<u>L'accélération du point M en mouvement circulaire uniforme</u> a pour expression : $a = \dfrac{v^2}{R}$