Sciences Physiques, Mathématiques et dérivée

La notion de dérivée est très utilisée en sciences physiques (notamment pour la définition des vitesses). Toutefois, cette notion définie dans le cadre des mathématiques doit être observée de près car l'usage que l'on en fait en sciences expérimentales peut parfois déconcerter. Souvent, par esprit de concision, le physicien utilise des raccourcis d'écriture qui peuvent sembler manquer de rigueur. Voyons cela.

Définition mathématique de la dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_o. On dit que f est dérivable en x_o si la quantité

$$\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

admet une limite finie quand h tend vers 0.
Cette limite est appelée **nombre dérivé** en x_o et notée $f'(x_0)$.
S'il existe, le nombre dérivé $f'(x_o)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point $M_o(x_o, f(x_o))$.
La **fonction dérivée** est la fonction $f' : x \longmapsto f'(x)$.

Vers la notation différentielle

Connaissant une fonction f comme nous l'avons choisie, on définit une nouvelle fonction ε par

$$\varepsilon(u)=\frac{f(x+u)-f(x)}{u}-f'(x)$$

Cette fonction vérifie

$$\lim_{u\to 0}\varepsilon(u)=0$$

En outre, écrivons

$$f(x+u)-f(x)=\big(f'(x)+\varepsilon(u)\big)u=f'(x)u+\varepsilon(u)u$$

Lorsque u tend vers 0, le dernier terme de cette équation disparaît, et

$$f(x+u)-f(x)=f'(x)u$$

Pour simplifier cette écriture, on introduit la notion de différentielle. Pour cela, il faut remarquer que u est une toute petite variation de x ; on note alors $dx = u$ la différentielle de x. De même, $f(x+u)-f(x)$ est une toute petite variation de f ; on note alors $df = f(x+u)-f(x)$ la différentielle de f. On obtient une relation entre ces différentielles,

$$df = f'(x)\,dx$$

<u>NB</u> : la démonstration ne tient que si dx tend vers 0 : dans tout cas, df et dx doivent rester des grandeurs infinitésimales.

Un peu d'histoire

Pour désigner le nombre dérivé d'une fonction f en un point a, les mathématiciens emploient la notation f'(a) due au mathématicien français Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).
Les physiciens privilégient la notation différentielle introduite, en 1684, par le mathématicien et philosophe allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), dans son traité « Nouvelle méthode pour chercher les maxima, les minima, ainsi que les tangentes …».

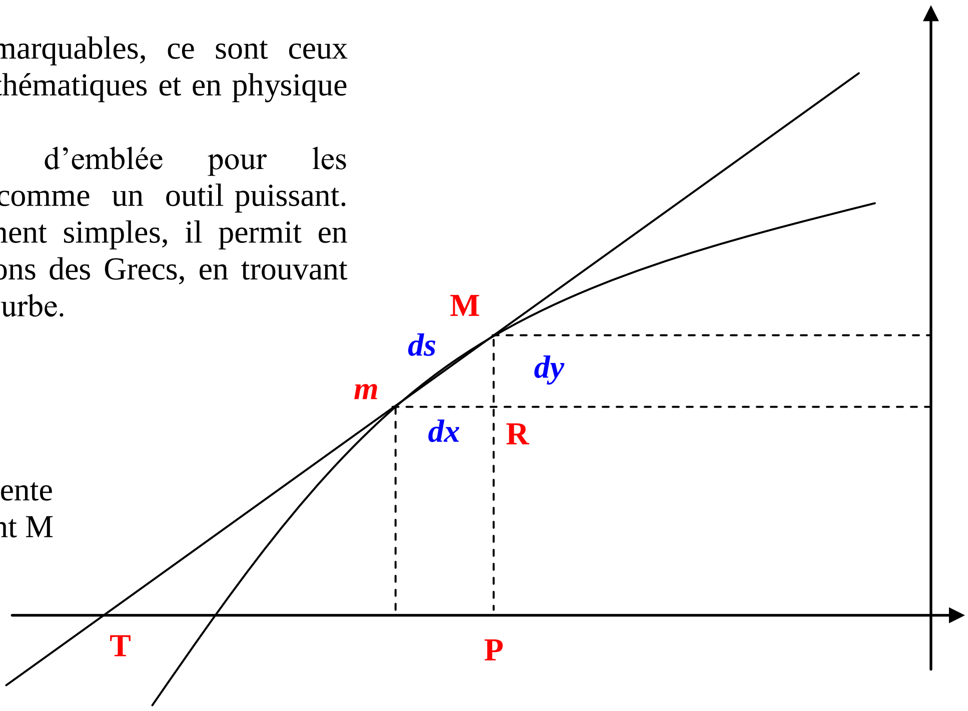
Historiquement, la notion de dérivée découle de celle de différentielle.
Dès l'antiquité, les Grecs s'intéressaient à la détermination des tangentes à des courbes. Ainsi Archimède (287- , 212-) propose une construction de la tangente en un point d'une spirale.
Mais, il faut attendre la première moitié du XVII$^{\text{ème}}$ siècle avec Descartes, Fermat et

Roberval, pour voir apparaître des méthodes plus générales de détermination de tangentes.
Ces méthodes donneront naissance au calcul différentiel développé séparément par Leibniz et par le mathématicien, physicien et astronome anglais Isaac Newton (1642-1727).
Voici la « définition » que donne l'Encyclopédie Méthodique de Diderot et d'Alembert (écrite entre 1751 et 1772).

Différentielle, *adj.*
On appelle dans la haute géométrie, quantité différentielle ou simplement différentielle, une quantité infiniment petite, ou moindre que toute grandeur assignable.
On l'appelle différentielle ou quantité différentielle, parce qu'on la considère ordinairement comme différence infiniment petite de deux quantités finies, dont l'une surpasse l'autre infiniment peu. NEWTON et les anglais l'appellent fluxion, à cause qu'ils la considèrent comme l'accroissement momentané d'une quantité. LEIBNITZ et d'autres l'appellent aussi une quantité infiniment petite.
Calcul différentiel ; c'est la manière de différentier les quantités, c'est-à-dire de trouver la différence infiniment petite d'une quantité finie variable.
Cette méthode est l'une des plus belles et des plus fécondes de toutes les Mathématiques ; M. LEIBNITZ qui l'a publiée le premier, l'appelle calcul différentiel, en considérant les grandeurs infiniment petites comme les différences des quantités finies ; c'est pourquoi il les exprime par la lettre d qu'il met au devant de la quantité différentiée ; ainsi la différentielle de x est exprimée par dx, celle de y par dy, etc.
M. NEWTON appelle le calcul différentiel, méthode des fluxions, parce qu'il prend, comme on l'a dit, les quantités infiniment petites pour des fluxions ou des accroissements momentanés. Il considère, par exemple, une ligne comme engendrée par la fluxion d'un point, une surface par la fluxion d'une ligne, un solide par la fluxion d'une surface ; et au lieu de la lettre d, il marque les fluxions par un point mis au dessus de la grandeur différentiée. Par exemple, pour la fluxion de x, il écrit $\dot{x}$, pour celle de y, $\dot{y}$ etc. C'est ce qui fait la seule différence entre le calcul différentiel et la méthode des fluxions…

Si les travaux de Newton sont remarquables, ce sont ceux de Leibniz qui ont prévalu en mathématiques et en physique grâce aux notations plus adaptées.
Le calcul différentiel apparut d'emblée pour les mathématiciens et les physiciens comme un outil puissant. Avec des règles de calcul relativement simples, il permit en premier lieu de répondre aux questions des Grecs, en trouvant des équations d'une tangente à une courbe.

Sous l'hypothèse que *la ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites chacune infiniment petite*, la pente de la tangente à une courbe en un point M est donnée par $\dfrac{PM}{PT} = \dfrac{RM}{Rm} = \dfrac{dy}{dx}$



Le calcul différentiel permit alors aux physiciens de déterminer la vitesse d'évolution d'un phénomène.
Considérons par exemple le mouvement d'un mobile se déplaçant sur une droite.
À un instant t, le mobile se trouve à une abscisse x.
Si on considère une distance infiniment petite dx correspondant à un temps infiniment petit dt, la vitesse instantanée à l'instant t s'exprime par

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

Ainsi, si l'on connaît la courbe d'évolution de x en fonction du temps, la vitesse à un instant donné sera le coefficient directeur de la tangente au point considéré.

Le XVIII$^{\text{ème}}$ siècle voit s'élargir le champ d'application du calcul différentiel. Cependant, en raison du statut imprécis des quantités infinitésimales et du recours à l'intuition en géométrie, confusion et polémiques règnent encore au sujet des fondements du calcul différentiel. La déclaration du savant, homme politique et Général Lazare Carnot (1753-1823) témoigne du malaise de l'époque au sujet des infiniment petits :

> « *On n'a jamais pu se former qu'une idée imparfaite de ces éléments, espèces d'êtres singuliers, qui tantôt jouent le rôle de véritables quantités, tantôt doivent être traités comme absolument nuls, et semblent par leurs propriétés équivoques, tenir le milieu entre la grandeur et le zéro, entre l'existence et le néant* ».

Des mathématiciens tentèrent alors de clarifier les notions de base en les dégageant de tout ce que le concept d'infiniment petit traîne avec lui de références métaphysiques.

Lagrange l'exprime explicitement, en 1797, dans le développement du titre de son ouvrage *Théorie des fonctions analytiques,* qui contient *« les principes du calcul différentiel dégagé de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies. »*

Ce n'est qu'au XIXème siècle que les analystes remplacent les vagues concepts d'infiniment petits par des notions solides et rigoureuses, fondées sur des quantités finies. Le mathématicien français Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) définit avec précision la limite. Son cours donné à l'École Polytechnique devient la référence de l'analyse. Il faudra attendre le XX$^{\text{ème}}$ siècle pour que les quantités infinitésimales soient complètement légitimées.

<u>Calculer avec la notation différentielle</u>

Comment peut-on noter la dérivée de la fonction $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$?

Evidemment, la notation $\sin'(\omega t + \varphi)$ ne convient pas, car elle correspond au nombre dérivé de la fonction au point $\omega t + \varphi$: $\sin'(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi) \neq \omega \cos(\omega t + \varphi)$. On touche ici un point délicat, celui de la confusion entre $(f \circ u)'$ et $f' \circ u$.

Solution : peut-on utiliser la notation $(\sin(\omega t + \varphi))'$? Les professeurs de maths préfèrent donner un nom à la fonction qu'il dérive, ce qui le conduit à écrire $f'(t) = \omega \cos(\omega t + \varphi)$.

Les professeurs de physique préfèrent utiliser la notation différentielle $\frac{d}{dt}\sin(\omega t + \varphi)$, ce qui lève toute ambiguïté : elle exprime bien le fait que l'on dérive la fonction $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$ et montre la dérivation comme un opérateur mathématique.

Un exemple d'utilisation : imaginons que le physicien soit amené à dériver la relation[1] $v = k\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{C}{L}}$, où k et C sont des constantes, par rapport à L.

$$\frac{dv}{dL} = \frac{d}{dL}\left(k\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{C}{L}}\right)$$

$$\frac{dv}{dL} = k\frac{d}{dL}\left(\left(\frac{L}{C} + \frac{C}{L}\right)^{1/2}\right)$$

$$\frac{dv}{dL} = \frac{1}{2}k \times \frac{d}{dL}\left(\frac{L}{C} + \frac{C}{L}\right) \times \left(\frac{L}{C} + \frac{C}{L}\right)^{-1/2}$$

[1] *Cette relation peut par exemple caractériser la vitesse de propagation d'une onde en eau profonde.*

$$\frac{dv}{dL}=\frac{1}{2}k\times\left(\frac{1}{C}-\frac{C}{L^2}\right)\times\frac{1}{\sqrt{\frac{L}{C}+\frac{C}{L}}}$$

$$\frac{dv}{dL}=\frac{1}{2}k\times\left(\frac{L^2-C^2}{CL^2}\right)\times\frac{1}{\sqrt{\frac{L}{C}+\frac{C}{L}}}=\frac{k\left(L^2-C^2\right)}{2CL^2\sqrt{\frac{L}{C}+\frac{C}{L}}}$$

<u>Δx et dx</u>

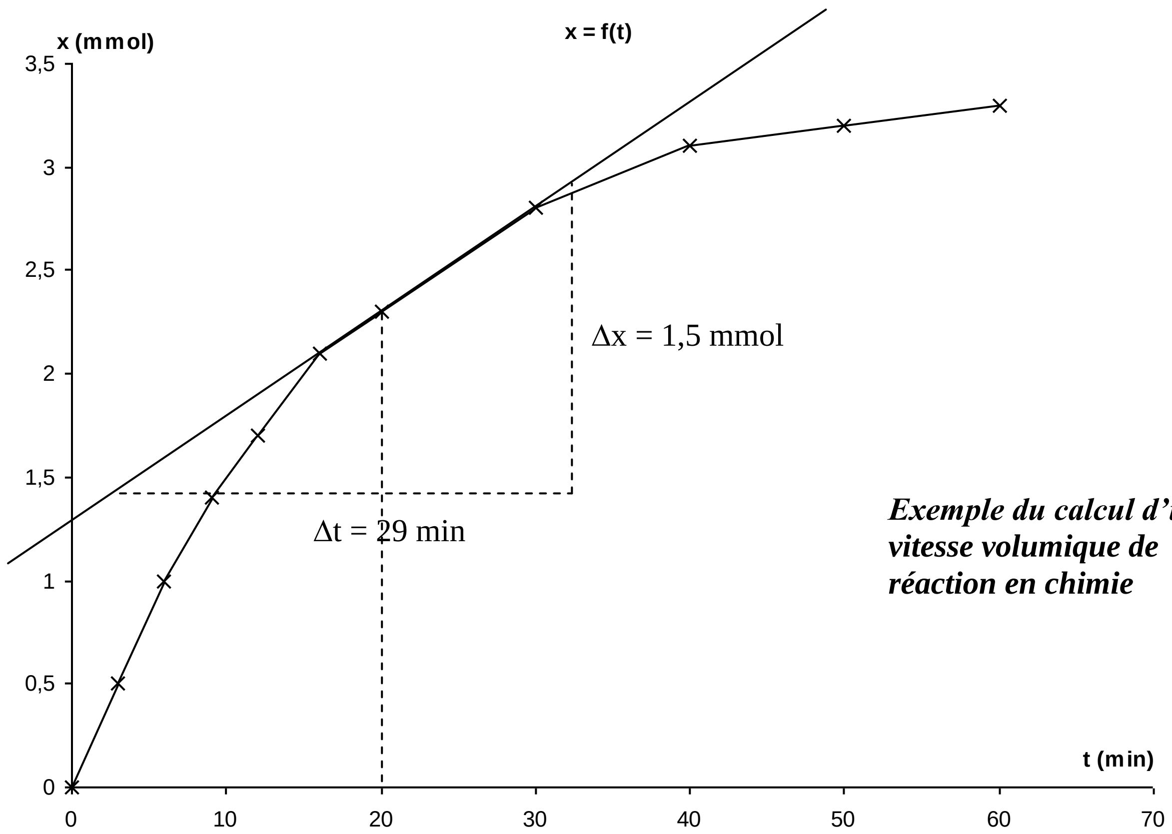
En physique, les élèves travaillent souvent sur les accroissements de quantités, notés avec la lettre grecque Δ. Si l'on étudie l'évolution d'une quantité x au cours du temps t, l'accroissement Δx de cette quantité entre les instants t et $t+\Delta t$ est approximativement égal à $x'(t)\times\Delta t$. Cette approximation est d'autant meilleure que Δt est petit.

Ainsi, à partir de mesures expérimentales, on peut déterminer une valeur approchés de $x'(t)$,

$$x'(t)\approx\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Dès lors que Δt est jugé suffisamment petit. Dans cette écriture, Δx et Δt sont des nombres réels.

En revanche, l'écriture différentielle $x'(t)=\frac{dx}{dt}$ est différente en cela que les objets dx et dt sont plus complexes à saisir : dans un premier temps, ces « infinitésimaux » peuvent être approchés par les Δx et Δt du physicien, mais il faudra attendre quelques années post-bac pour bien en saisir le sens.



Exemple du calcul d'une vitesse volumique de réaction en chimie

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=20\min}\approx\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{tangente en t}=20\min}=\frac{1,5}{29}=0,052\,mmol.\min^{-1}$$

Pour obtenir la valeur de la vitesse, il ne reste qu'à diviser par le volume réactionnel, qui est de 200 mL,

$$v_{(t=20\min)}=\frac{1}{V}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=20\min}\approx\frac{1}{200.10^{-3}}\times0,052=0,26\,mmol.L^{-1}.\min^{-1}$$