Travail et énergie mécanique

Si le chapitre 7 donnait les lois de la mécanique permettant de connaître position, vitesse et accélération d'un système soumis à un ensemble de forces extérieures, nous prenons ici un tout autre angle de vue, en utilisant des considérations énergétiques.
Dans toute la suite, le référentiel d'étude est supposé galiléen, et les objets étudiés sont des solides indéformables ramenés à leur centre d'inertie.

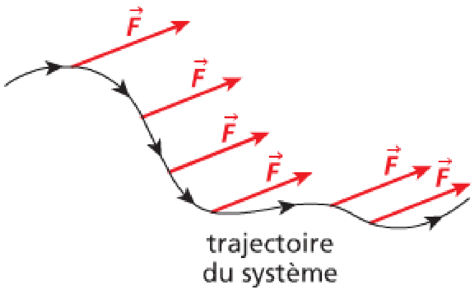
1 – Travail d'une force

1.1 – Transfert d'énergie par travail mécanique

Un automobiliste exerçant sur sa voiture (en panne) une force $\vec{F}$ supposée constante au cours du temps donne de la vitesse au véhicule : la voiture acquiert donc de l'énergie (sous forme d'énergie cinétique) quand, simultanément, l'automobiliste en perd (sous forme d'énergie biochimique). Ce transfert d'énergie est le travail de la force $\vec{F}$.

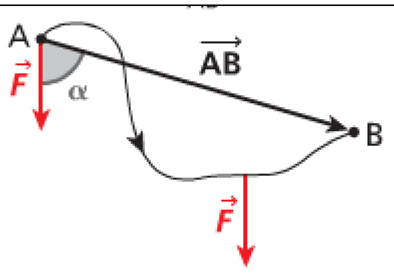
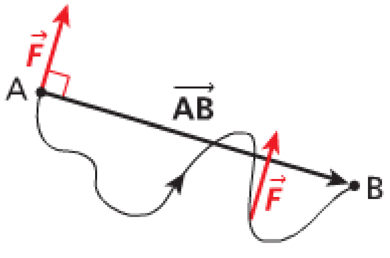
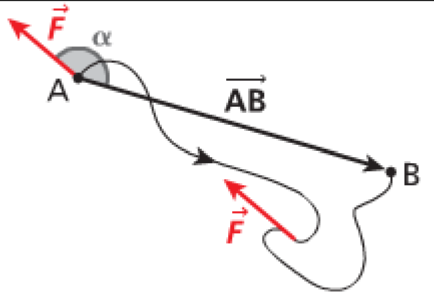
1.2 – Travail d'une force constante

La force $\vec{F}$ subie par un système en mouvement est constante si, en chaque point, elle garde mêmes direction, sens et valeur.
Dans ce cas, son travail sur un déplacement du système d'un point A vers un point B est donné par le produit scalaire



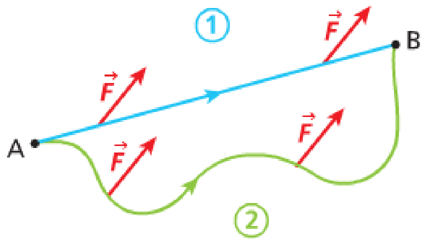
$$W_{AB}\left(\vec{F}\right)=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}=F\times AB\times\cos\left(\vec{F},\overrightarrow{AB}\right)$$

Le travail s'exprime en joules (J) si la valeur de la force est en newtons (N) et la distance AB en mètres (m). Il s'agit d'une grandeur algébrique.

$W_{AB}\left(\vec{F}\right)>0$	$W_{AB}\left(\vec{F}\right)=0$	$W_{AB}\left(\vec{F}\right)<0$
$0\leq\left(\vec{F},\overrightarrow{AB}\right)<\frac{\pi}{2}(ou\,90°)$	$\left(\vec{F},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\pi}{2}(ou\,90°)$	$\frac{\pi}{2}(ou\,90°)<\left(\vec{F},\overrightarrow{AB}\right)\leq\pi(ou\,180°)$
La force favorise le déplacement	La force n'a pas d'effet sur le déplacement	La force gêne le déplacement
Le travail est moteur	Le travail est nul	Le travail est résistant
Cas du poids lors d'une descente	Cas du poids lors d'un déplacement horizontal	Cas du poids lors d'une montée
		

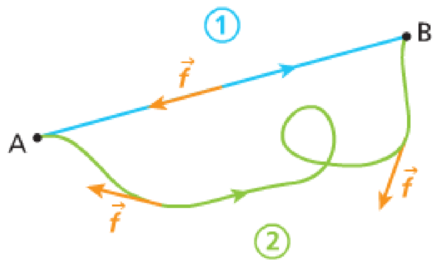
1.3 – Forces conservatives ou non-conservatives

Une force est dite **conservative** si son travail entre deux points A et B quelconques ne dépend pas de la trajectoire suivie entre ces deux points.
Toutes les forces constantes sont conservatives : le poids (dans un champ de pesanteur uniforme), la force électrique (dans un champ électrostatique uniforme), mais aussi d'autres forces non constantes (force de rappel élastique d'un ressort, par exemple).



$W_{AB}(\vec{F})_{\text{trajet } ①} = W_{AB}(\vec{F})_{\text{trajet } ②}$

Dans le cas d'une trajectoire fermée (c'est-à-dire si le système revient à son point de départ), le travail d'une force conservative est nulle.



$W_{AB}(\vec{f})_{\text{trajet } ①} \neq W_{AB}(\vec{f})_{\text{trajet } ②}$

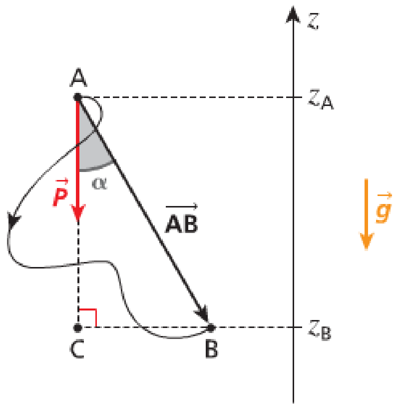
Les forces de frottements ou la force de tension d'un fil sont des forces non-conservatives.

2 – Travaux de quelques forces

2.1 – Travail du poids dans un champ de pesanteur uniforme

Soit un objet de masse m qui parcourt un déplacement quelconque entre deux points A et B dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$.
Le poids exercé sur cet objet est une force constante, $\vec{P} = m\vec{g}$.
Le travail du poids a pour expression

$$W_{AB}\left(\vec{P}\right) = \vec{P}\cdot\overrightarrow{AB} = m\,\vec{g}\cdot\overrightarrow{AB}$$



Dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, associé au référentiel terrestre, si l'axe (Oz) est un axe vertical ascendant,

$$\vec{g}\begin{cases}0\\0\\-g\end{cases} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{cases}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{cases}$$

Dans ce cas,

$$W_{AB}\left(\vec{P}\right) = m(-g)(z_B - z_A) = mg(z_A - z_B)$$

Exercice : calculer le travail du poids du ballon de basket (m = 650 g) entre le point de lancer (altitude : 2,20 m) et le panier (altitude : 3,05 m). Commenter le signe de ce résultat.
Réponse : W = – 5,42 J.

2.2 – Travail de la force électrique en champ électrostatique uniforme

Entre deux plaques P et N d'un condensateur plan règne un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$ perpendiculaire aux plaques. Une particule de charge q en mouvement entre les deux plaques est soumise à la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$.

Entre deux points A et B, la force électrique est constante, donc conservative et son travail sur le trajet AB ne dépend pas du chemin suivi. Il peut donc être calculé en passant par le point C,

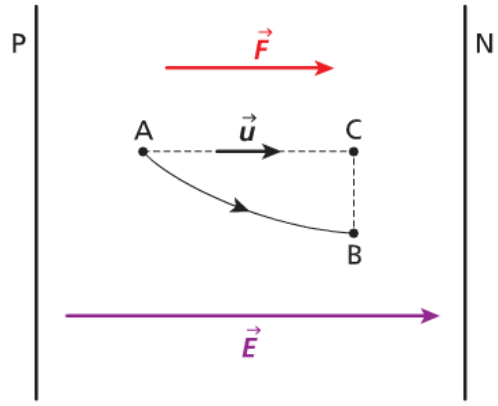
$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AC} + \vec{F}\cdot\overrightarrow{CB}$$

Or, $\vec{F}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$ puisque $\vec{F} \perp \overrightarrow{CB}$. Ainsi,

$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AC} = qE \times AC$$

Comme $E = \dfrac{U_{AC}}{AC} = \dfrac{U_{AB}}{AC}$,

$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = qU_{AB}$$



$q > 0$ et $U_{AB} > 0$

Exercice : L'électron-volt, de symbole eV, est une unité d'énergie égale à la valeur absolue du travail de la force électrique exercée sur un électron lors d'un déplacement correspondant à une tension de 1 V. Calculer la valeur d'un électron-volt en joules.
Réponse : 1 eV = e J = 1,60218.10^{-19} J

2.3 – Travail d'une force de frottements d'intensité constante sur une trajectoire rectiligne

Une force de frottements $\vec{f}$ n'est pas conservative. Ainsi, le travail de cette force sur un déplacement allant de A vers B dépend du chemin emprunté : plus il est long, plus le système perd de l'énergie par transfert thermique vers l'extérieur, assuré par le travail de la force de frottements.

Sur une trajectoire rectiligne, une force de frottements d'intensité constante a même direction (celle du déplacement) et même sens (opposé au déplacement) à chaque instant. Il vient

$$W_{AB}\left(\vec{f}\right) = \vec{f}\cdot\overrightarrow{AB} = -f \times AB$$

Ce travail est négatif : il réalise un transfert thermique vers l'extérieur.

3 – Conservation de l'énergie mécanique

3.1 – Energies potentielles associées à des forces conservatives

Le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des positions du point de départ et du point d'arrivée. Du fait de cette caractéristique, il peut être défini comme la variation d'une grandeur du système appelée énergie potentielle, dépendant de la position du système dans son environnement.

Une bille au sommet d'une pente roule jusqu'en bas : elle accusait une réserve d'énergie, liée à sa position et à une force conservative, qui va être utilisée par le travail de cette force lorsque le corps se déplace. Cette énergie a le potentiel de se transformer en énergie cinétique.

L'énergie potentielle E_p associée à la force conservative $\vec{F}$ subie par un système est définie par sa variation lors du déplacement du système entre un point A et un point B : la variation d'énergie potentielle entre ces deux points est égale à l'opposé du travail de la force $\vec{F}$ sur le trajet de A à B,

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -W_{AB}\left(\vec{F}\right)$$

Une énergie potentielle est définie par ses variations : elle est toujours connue *à une constante arbitraire près*.

Par exemple, la variation d'**énergie potentielle de pesanteur** d'un objet de masse m entre un point A d'altitude nulle et un point B d'altitude z est donnée par

$$\Delta E_{pp} = E_{pp}(B) - E_{pp}(A) = mg\left(z_A - z_B\right)$$

On retrouve bien le fait que

$$E_{pp}(z) = mgz + cste$$

De même, une particule de charge q dans un champ électrostatique uniforme connaît, lors d'un déplacement entre A et B, une variation d'**énergie potentielle électrostatique**

$$E_{pe}(B) - E_{pe}(A) = -W_{AB}\left(\vec{F}\right) = -qU_{AB}$$

Or, la tension U_{AB} est une différence de potentiel électrique : $U_{AB} = V_A - V_B$.

$$E_{pe}(B) - E_{pe}(A) = -q\left(V_A - V_B\right) = qV_B - qV_A$$

L'expression de l'énergie potentielle électrostatique d'une particule en un point M de potentiel V(M) est donc

$$E_{pe}(M) = qV(M) + cste$$

Enfin, un ressort maintenu à l'allongement x possède une **énergie potentielle élastique** dépendant de l'allongement et de la constante de raideur k,

$$E_{p,\acute{e}last} = \frac{1}{2}k \times x^2$$

3.2 – Définition de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un système soumis à un ensemble de forces conservatives est égale à la somme de son énergie cinétique E_c et de ses énergies potentielles E_p associées aux forces conservatives,

$$E_m = E_c + E_{pp} + \ldots$$

Exercice : calculer l'énergie mécanique d'un ballon de football de masse m = 430 g passant à la hauteur h = 2,5 m au-dessus du sol à la vitesse v = 72 km.h^{-1}.
Réponse : E_m = 97 J.

3.3 – Transferts énergétiques au cours d'un mouvement

La variation de l'énergie mécanique d'un système, en mouvement entre deux points A et B, est égale à la somme des travaux des forces non-conservatives $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, etc. qu'il subit sur le trajet allant de A à B,

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W_{AB}\left(\overrightarrow{F_{nc1}}\right) + W_{AB}\left(\overrightarrow{F_{nc2}}\right)\ldots$$

Si le système ne subit que des forces conservatives, son énergie mécanique est constante au cours du mouvement : $\Delta E_m = 0$.
Si le système subit au moins une force non-conservative, son énergie mécanique n'est pas constante.
Un énoncé équivalent de ce qui précède est le théorème de l'énergie cinétique,

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum_i W_{AB}\left(\vec{F_i}\right)$$

où l'on considère, cette fois, la somme de tous les travaux sans distinction.

Exemple

Un skieur de masse m monte, à vitesse constante, une piste rectiligne, inclinée par rapport à l'horizontale, à l'aide d'une perche accrochée à un téléski, elle-même inclinée par rapport à la piste. Décrire les transferts énergétiques qui ont lieu.

Le skieur, réduit à son centre de gravité G, subit : son poids $\vec{P}$, la réaction normale de la piste $\vec{R}$, la force de tension de la perche $\vec{T}$, supposée constante, et les frottements de l'air et de la piste, assimilés à une force unique $\vec{f}$, supposée constante au cours du mouvement. **(Fig. 15)**

La force $\vec{R}$ ne travaille pas au cours du mouvement car elle est perpendiculaire au déplacement.

Le poids $\vec{P}$ est une force conservative.

La force de frottements $\vec{f}$, ainsi que la tension de la perche $\vec{T}$, ne sont pas des forces conservatives.

$W_{AB}(\vec{T}) > 0$ car $\vec{T}$ est une force motrice. $W_{AB}(\vec{f}) < 0$ car $\vec{f}$ est une force résistante, qui dissipe de l'énergie mécanique par transfert thermique.

Le théorème de l'énergie mécanique donne la relation :

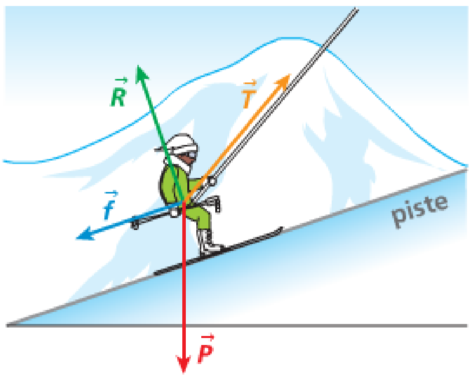
$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_{pp} = W_{AB}(\vec{f}) + W_{AB}(\vec{T})$$

L'énergie cinétique est constante car la vitesse l'est aussi.

L'énergie potentielle de pesanteur croît car l'altitude augmente.

L'énergie mécanique augmente donc au cours du mouvement.

Ainsi, $W_{AB}(\vec{f}) + W_{AB}(\vec{T}) > 0$.



Remarque

Pour un système en chute libre (soumis à une force conservative), nous avons donc

$$E_m = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = cste$$

Dérivons cette expression par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(v_x{}^2 + v_z{}^2\right)\right) + \frac{d}{dt}\left(mgz\right) = mv_z\frac{dv_z}{dt} + mg\frac{dz}{dt} = 0$$

puisque la coordonnée v_x est constante. Comme $\frac{dv}{dt} = a_z$ et $\frac{dz}{dt} = v_z$, il vient $mv_z a_z + mgv_z = 0$: après simplification, nous retrouvons le bilan donné par la 2ème loi de Newton, $a_z = -g$ …