Mesures et incertitudes

En physique et en chimie, tout grandeur, mesurée ou calculée, est entachée d'erreur, ce qui ne l'empêche pas d'être exploitée pour prendre des décisions.
Aujourd'hui, la notion d'erreur a son vocabulaire ; le but est ici d'apprendre à estimer ou à calculer l'incertitude de mesure associée.

1 – Grandeurs physiques

1.1 – Grandeurs mesurées et calculées

Une grandeur est utilisée en sciences pour caractériser un objet ou un événement.
Les plus courantes, telles que la masse ou la longueur, ont été initialement définies par comparaison à des étalons tels que le mètre-étalon ou le kilogramme-étalon.
Les grandeurs sont obtenues soit par mesure (avec des instruments adaptés) soit par calcul (à partir d'autres grandeurs).
La masse *m* d'un véhicule est mesurée à l'aide d'une bascule, sa vitesse v est lue sur le compteur ; son énergie cinétique est calculée à l'aide de la relation $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.


Le kilogramme-étalon, conservé au Palais de Breteuil, à Sèvres (France)

1.2 – Unités

La plupart des grandeurs sont associées à des unités ayant un nom et un symbole[1]. Le système le plus utilisé, appelé système international (SI), comporte sept unités : mètre, kilogramme, seconde (MKS), ampère, mole, kelvin et candela ; toutes les autres unités peuvent être exprimées à partir de ces unités de base.
Mesurer une grandeur, c'est la comparer à son unité : la mesure comporte une valeur accompagnée de son unité.
L'indice de réfraction ou la densité sont des grandeurs sans unité : elles sont dites adimensionnées.

→ Reconnaître une grandeur et lui affecter une unité
Parmi les notions suivantes : la faim, la durée de cuisson d'un gâteau, sa température de cuisson, l'angle fait par une part, son apport calorique, la digestion… Lesquelles sont des grandeurs mesurables ? Leur donner une unité.


Peut-on mesurer la faim en degrés d'angle ?

2 – Précision et incertitude

2.1 – Intervalle de confiance

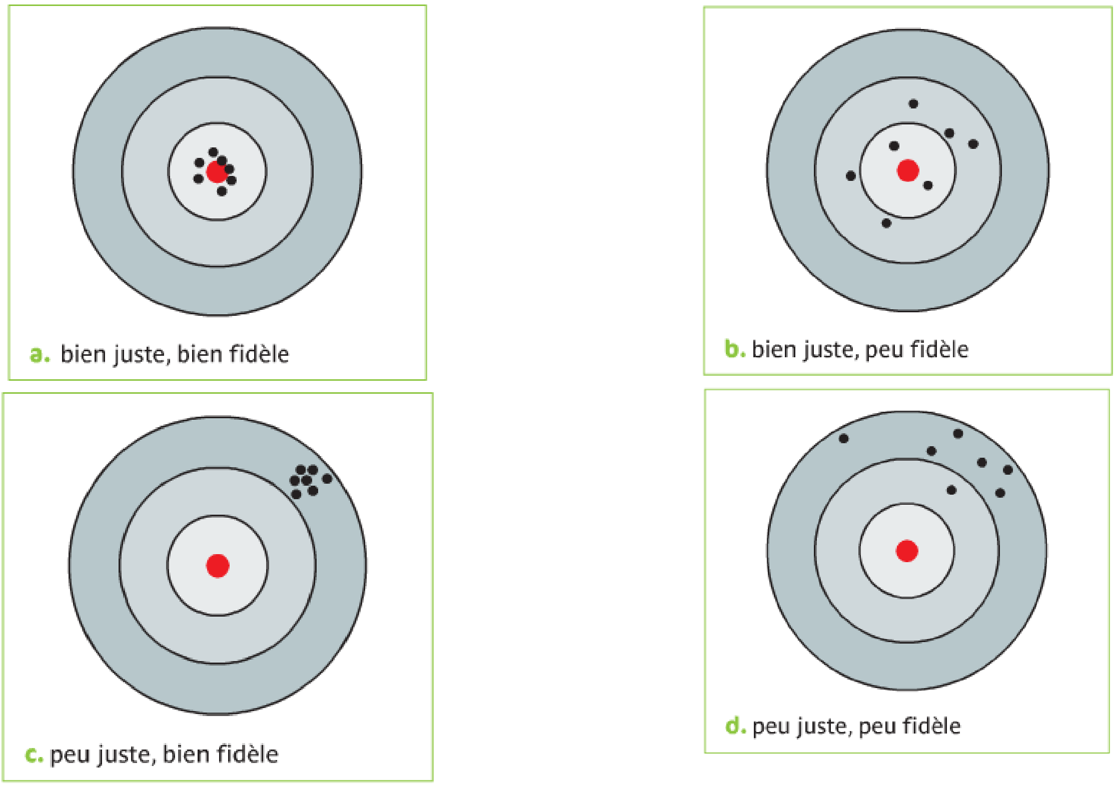
Qu'elles soient mesurées ou calculées, les valeurs des grandeurs ne peuvent être connues qu'avec une précision limitée.

[1] Le nom d'une unité est un nom commun, écrit sans majuscule. James Joule a donné son nom à l'unité d'énergie du système international, le joule, de symbole J. Les unités issues de noms propres ont un symbole commençant par une majuscule.

La valeur vraie d'une grandeur n'est pas accessible : du fait des fluctuations de tout phénomène et des imperfections des mesures, l'expérimentateur n'a accès qu'à des valeurs *estimées* des grandeurs, dont il peut donner un encadrement avec un bon niveau de confiance.
Cet encadrement est appelé **intervalle de confiance** dans lequel il estime que la valeur vraie de la grandeur se trouve.

2.2 – Erreurs de mesure

La difficulté d'obtenir une valeur fiable d'une grandeur est analogue à celle que rencontre un tireur sur une cible : elle est due soit à des erreurs aléatoires, soit à des erreurs systématique, soit aux deux à la fois.



a. bien juste, bien fidèle

b. bien juste, peu fidèle

c. peu juste, bien fidèle

d. peu juste, peu fidèle

Les **erreurs aléatoires** sont dues

- à la fluctuation de la grandeur mesurée, qui n'est pas forcément stable dans le temps (la distance Terre-Lune) ou qui n'est pas la même dans tout l'échantillon (la température de la mer mesurée par le surveillant de la plage).
- à la fluctuation de la méthode de mesure, c'est-à-dire à la manière d'utiliser l'appareil expérimental

Ces fluctuations se traduisent par un écart entre les différentes valeurs obtenues lors des mesures : d'une mesure à l'autre, l'erreur aléatoire varie ; plus ces erreurs sont petites, plus la fidélité de la mesure est grande.

Les **erreurs systématiques** sont liées à l'appareil de mesure et peuvent disparaître idéalement par réglage. Par exemple, une balance n'affichant pas zéro en l'absence de masse à peser donnerait lieu à une erreur systématique.
Plus l'erreur systématique de mesure est petite, plus la justesse de la mesure est grande. Ainsi, à priori, la fig. c indique que le fusil est mal réglé.

2.3 – Incertitude absolue

Le résultat d'une mesure ou d'un calcul est souvent présenté avec son incertitude, qui rend compte des erreurs.

La valeur x d'une grandeur, résultant d'une mesure ou d'un calcul, peut être présentée comme une valeur estimée $x_{estimée}$ associée à son incertitude absolue Δx

$$x = x_{estimée} \pm \Delta x$$

Δx est un nombre positif ; cela revient à donner pour x l'encadrement définissant l'intervalle de confiance,

$$x_{estimée} - \Delta x \leq x \leq x_{estimée} + \Delta x$$

Exemple

Le résultat d'une mesure de tension à l'aide d'un voltmètre peut être sous la forme

$$U = 4{,}35 \pm 0{,}03 \text{ V}$$

Cela signifie que la tension U est comprise entre 4,32 et 4,38 V.

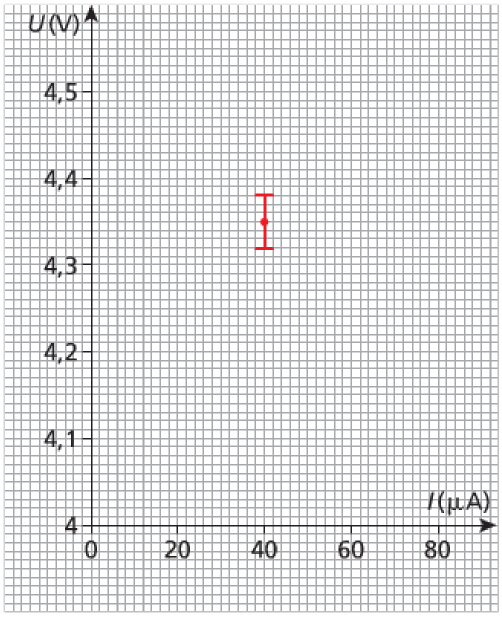
L'incertitude absolue est donnée, la plupart du temps, avec un seul chiffre significatif. Lorsque la valeur d'une grandeur est donnée sans incertitude, cette dernière est, par convention, égale à une demi-unité du dernier chiffre significatif exprimé.

Exemple

m = 1,4 g signifie m = 1,40 ± 0,05 g.

L'incertitude absolue se représente graphiquement par une barre d'erreur.

Sur le graphe ci-contre, la tension est représentée avec sa barre d'erreur ; la barre d'erreur de l'intensité n'est pas représentée : elle est plus petite que ce que les divisions du papier permettent de lire.



2.4 – Incertitude relative

L'incertitude relative, notée $\frac{\Delta x}{x}$, donne la précision d'une mesure : plus elle est petite, plus la mesure est précise.

Concrètement, on l'obtient en calculant $\frac{\Delta x}{|x_{estimée}|}$.

Elle n'a pas d'unité et s'exprime souvent en pourcentage ; elle est le plus souvent donnée avec un seul chiffre significatif.

Selon la décision à prendre à partir de la mesure, un degré de précision plus ou moins élevé peut être attendu.

22 kΩ à 5%
R = 22 ± 1 kΩ

Exemple

La largeur d'une feuille de papier peut être mesurée au demi-millimètre près à l'aide d'une règle graduée

$$L = 21{,}00 \pm 0{,}05 \text{ cm}$$

Le rayon équatorial de la planète Mars n'est connu qu'à cent mètres près,

R = 3 396,2 ± 0,1 km

Incertitudes relatives : $\frac{\Delta L}{L} = \frac{0,05}{21,00} = 2.10^{-3}$ et $\frac{\Delta R}{R} = \frac{0,1}{3396,2} = 3.10^{-5}$ La mesure de R est donc bien plus précise que celle de L.

3 – Estimation de l'incertitude

L'incertitude ne s'évalue pas de la même manière, selon que la mesure soit faite en une seule fois ou répétée un grand nombre de fois.

3.1 – Mesures effectuées une seule fois

L'incertitude d'une mesure unique conjugue deux sources d'informations,

- des informations techniques sur l'instrument de mesure données par le fabricant ou connues conventionnellement
- des informations subjectives sur l'appréciation de la façon dont la mesure a été effectuée.

Exemple : incertitude sur la mesure d'une tension au voltmètre numérique

« Précision, toutes gammes : ± 0,5 % de la valeur affichée + 1 digit »

L'indication 0,5 % traduit une incertitude relative de 0,005, et le digit à ajouter correspond au dernier chiffre exprimé de la mesure, soit 0,01 V. L'incertitude de mesure est donc de

$$\Delta U = 0,005 \times 8,05 + 0,01 = 0,05 \text{ V}$$

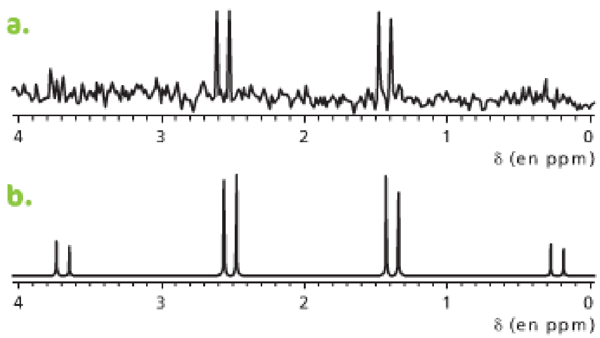
La mesure s'écrit ainsi U = 8,05 ± 0,05 V.

3.2 – Mesures effectuées plusieurs fois

Une mesure peut être répétée à quelques reprises ou un grand nombre de fois (systèmes d'acquisition automatique).

La répétition des mesures améliore la précision de la mesure, ce qui est indispensable pour un dispositif de mesure peu fidèle.

La moyenne des valeurs mesurées est la meilleure estimation qui puisse être faite ; l'incertitude se calcule selon une règle dépendant de la situation, dont l'établissement dépasse le cadre du lycée.



Spectre RMN sur une seule mesure (a)
et sur 50 mesures (b)

Pour une série de n mesures indépendantes donnant des valeurs mesurées mk, l'écart-type de la série de mesures est

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(mk - \overline{m}\right)^2}{n-1}}$$

où $\overline{m}$ est la moyenne de la série de mesures.

L'incertitude de répétabilité associée à la mesure dépend du nombre de mesures et de l'écart-type peut être calculée par

$$\Delta M = k \times \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

où k, facteur d'élargissement, dépend du nombre de mesures réalisées et du niveau de confiance choisi. Sa valeur figure dans une table issue de la loi statistique de Student.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$k_{95\%}$	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,23	2,20	2,18	2,16	2,15	2,13
$k_{99\%}$	63,7	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25	3,17	3,11	3,06	3,01	2,98	3,95

<u>Exemple</u>
La mesure de la durée Δt de chute d'un objet depuis une fenêtre a été répétée 16 fois avec un chronomètre de qualité. Les résultats sont les suivants.

1,38	1,45	1,41	1,45	1,43	1,41	1,46	1,39
1,43	1,48	1,38	1,44	1,40	1,42	1,39	1,44

La moyenne est de 1,42 s, l'écart-type de 0,029 65 s.
Avec un niveau de confiance de 95 %, l'incertitude de répétabilité est

$$\Delta M_{95\%} = 2,13 \times \frac{0,029\,65}{\sqrt{16}} = 0,016\,s$$

Avec un niveau de confiance de 99 %, l'incertitude de répétabilité est

$$\Delta M_{99\%} = 2,95 \times \frac{0,029\,65}{\sqrt{16}} = 0,022\,s$$

3.3 – <u>Etalonnage</u>

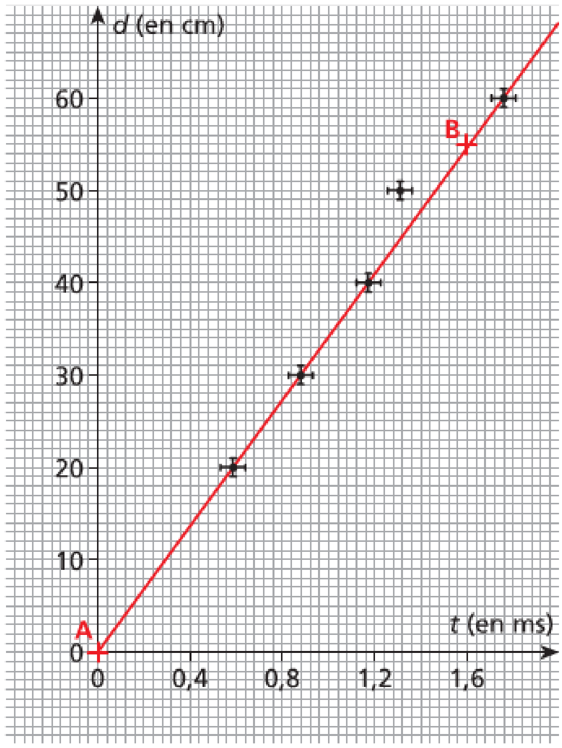
Une série de mesures effectuées dans les mêmes conditions sur une série d'échantillons permet de tracer une courbe d'étalonnage. Lorsque celle-ci peut être modélisée par une droite, il est possible d'en déterminer graphiquement les caractéristiques : coefficient directeur, ordonnée à l'origine, qui donnent une valeur plus précise qu'une mesure unique.
Le coefficient directeur est calculé à partir des points de la droite (non nécessairement des points de mesure), ce qui correspond à une forme de moyenne appelée **régression**.
La qualité des mesures (et de la modélisation) est alors traduite par un *coefficient de corrélation* ; elle est d'autant meilleure que ce coefficient est proche de 1.
L'alignement des points valide la méthode de mesure en montrant qu'elle est répétable : c'est l'analogue du tir groupé sur la cible.

<u>Exemple</u>
Un dispositif informatique permet, à l'aide d'un émetteur et d'un récepteur, de mesurer les durées de propagation t du son pour diverses distances d parcourues. Les distances sont connues avec une incertitude Δd = 1 cm, les durées avec une incertitude Δt = 0,05 ms.

d (cm)	20	30	40	50	60
t (ms)	0,59	0,87	1,18	1,31	1,76

Le graphique tracé à partir des mesures présente des points semblant alignés, à une anomalie près. La droite de tendance est tracée et son coefficient directeur mesuré graphiquement ;

$$v = \frac{d(B) - d(A)}{t(B) - t(A)} = \frac{55.10^{-2} - 0}{1,6.10^{-3} - 0} = 3,4.10^{2}\,m.s^{-1}$$



Il s'agit de la vitesse du son dans l'air, déterminée ainsi plus précisément qu'en divisant, pour une seule mesure, d par t. Si cette division avait utilisé la mesure anormale, le résultat aurait été complètement faux…

4 – Calculs d'incertitudes

4.1 – Incertitudes dans les calculs

Pour une grandeur obtenue par calcul, l'incertitude sur la valeur de cette grandeur se calcule également.
Le nombre de chiffres significatifs avec lequel un résultat est exprimé doit être en accord avec l'incertitude absolue calculée.
Exemple : pour une grandeur x calculée à partir des grandeurs y et z, on peut appliquer les règles simplifiées suivantes :

- Si x résulte d'additions ou de soustractions (ex : $x = 2y - 3z$), l'incertitude absolue sur x est une somme d'incertitudes absolues ($\Delta x = 2.\Delta y + 3.\Delta z$).
- Si x résulte de multiplications ou de divisions (ex : $x = 4yz$), l'incertitude relative sur x est la somme des incertitudes relatives sur y et sur z ($\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$, le facteur ‘ n'intervenant pas dans l'expression)

Ainsi, prenons un pot de fleurs de masse $m = 2{,}3 \pm 0{,}2$ kg tombant d'une altitude $h = 4{,}5 \pm 0{,}1$ m au-dessus du sol. L'intensité de la pesanteur est $g = 9{,}81 \pm 0{,}01$ $N.kg^{-1}$.
L'énergie potentielle de pesanteur du pot est Epp = mgh = 101,53 J : un excès de chiffres significatifs est provisoirement conservé, et sera tranché à la lumière du calcul d'incertitude

$$\frac{\Delta Epp}{Epp} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta h}{h} = 0{,}1$$

soit $\Delta Epp = 0{,}1 \times 101{,}53 = 1.10^1$ J.
L'énergie potentielle de pesanteur s'écrira donc : $Epp = (10 \pm 1)\ 10^1$ J.
Remarque : ces formules sont données au baccalauréat.

4.2 – Chiffres significatifs et calculs

Si le résultat provient de multiplication et de division de facteurs, le résultat s'exprime avec le même nombre de chiffres significatifs que le facteur qui en possède le moins.

Si le résultat provient d'une somme ou d'une différence de termes, il faut les exprimer dans la même unité pour procéder au calcul : le dernier chiffre exprimé dans le résultat est déterminé par le dernier chiffre exprimé de la donnée la moins précise.

Attention : certains nombres sont considérés comme exacts : c'est le cas du coefficient ½ de l'énergie cinétique, mais aussi de la vitesse de la lumière dans le vide, c = 299 792 458 $m.s^{-1}$ (convention de 1983).

Exemple

Une feuille est mesurée avec une règle graduée de 30 cm.
Sa largeur est ℓ = 29,7 cm ; pour connaître sa longueur, il faut utiliser la règle deux fois, ce qui n'autorise pas la même précision : une manipulation peu soigneuse donne L = 42 cm.

- L'aire de la feuille est S = Lℓ = 42 x 29,7 = 1,2.103 cm^2 : il n'y a que deux chiffres significatifs au résultat, puisque la longueur en comporte deux.
- Le périmètre de la feuille est P = 2L + 2ℓ = 2 x 42 + 2 x 29,7 = 143 cm. Le plus petit chiffre exprimé est celui des millimètres pour la largeur, mais celui des centimètres pour la longueur : le résultat comporte trois chiffres significatifs, et non deux comme on pourrait s'y attendre avec la règle pour les multiplications/divisions…

5 – Pratique expérimentale

5.1 – Données anormales

Certaines données doivent être éliminées quand elles sont manifestement incohérentes avec les autres valeurs. Cette élimination doit donner lieu à une réflexion sur la méthode de mesure.
En toute rigueur, une mesure anormale pour laquelle aucune cause n'est imaginée doit être effectuée de nouveau avant d'être éliminée.

5.2 – Améliorer une méthode de mesure

Il est essentiel d'indiquer la précision avec laquelle les données mesurées sont fournies, soit en veillant à indiquer le bon nombre de chiffres significatifs, soit en donnant l'incertitude. Ces informations permettent de valider la méthode de mesure utilisée et les conclusions tirées des mesures.
La réduction des deux types d'erreurs améliore la mesure,

- pour réduire l'erreur aléatoire, il faut reproduire la mesure afin de réduire l'influence des fluctuations à l'aide d'une moyenne
- pour réduire l'erreur systématique, il faut vérifier chaque étape de la mesure pour éliminer le biais.

5.3 – Comparer le résultat d'une mesure à une valeur de référence

Lorsqu'une valeur de référence est attendue, il convient de vérifier que le résultat de la mesure ou du calcul est compatible avec cette valeur.
Si le résultat de la mesure ou du calcul est fourni avec son incertitude, alors la mesure est satisfaisante si son intervalle de confiance englobe la valeur de référence. Sinon, soit la mesure n'est pas satisfaisante et comporte des erreurs systématiques, soit l'estimation de l'erreur n'a pas pris en compte les bons paramètres.
Si le résultat de la mesure ou du calcul est fourni sans son incertitude, il est possible de calculer simplement l'écart relatif entre la valeur obtenue, $x_{obtenue}$, et la valeur de référence, $x_{réf}$,

$$\left|\frac{x_{obtenue} - x_{réf}}{x_{réf}}\right| \quad \text{(si } x_{réf} \text{ est non nulle)}$$

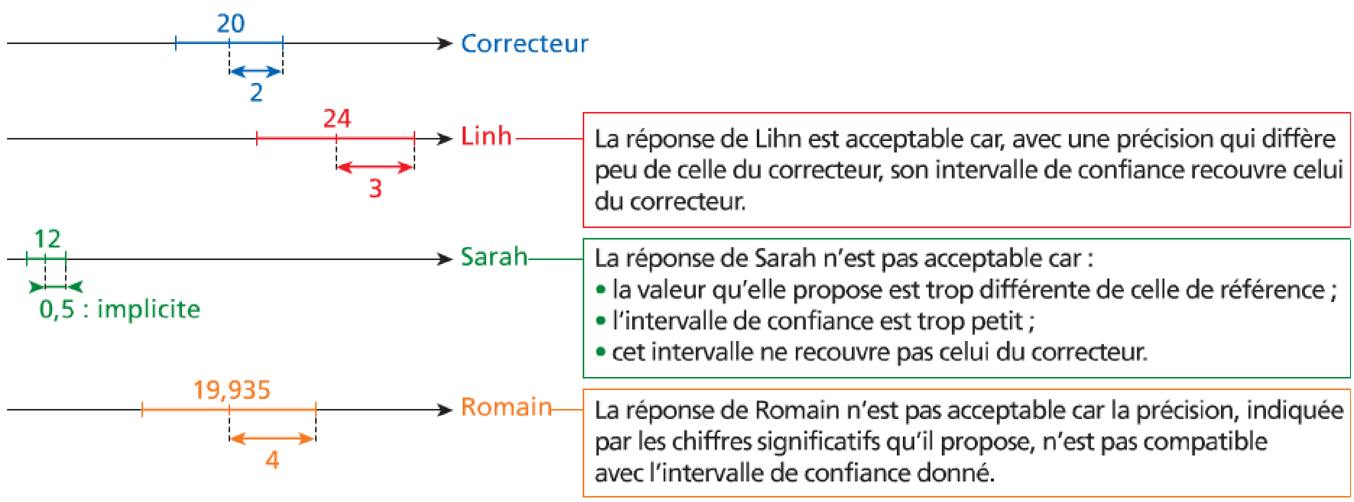
La mesure est alors d'autant plus satisfaisante que cet écart relatif est petit.

<u>Exemple</u>

En TP évalué, trois candidats font la même détermination de la concentration c d'un acide. Ils proposent les valeurs suivantes.

- Linh : 24 ± 3 $mmol.L^{-1}$
- Sarah : 12 $mmol.L^{-1}$
- Romain : 19,935 ± 4 $mmol.L^{-1}$

Le correcteur attend la valeur c = 20 ± 2 $mmol.L^{-1}$.



Activité expérimentale : préparation de solutions

Les récipients mesurant un volume n'ont pas tous la même précision : cela influe, par exemple, sur la connaissance de la concentration.
Dans la suite, la masse volumique de l'eau à 20°C est prise égale à ρ = 0,998 16 g.mL^{-1}.

1 – Expérience préliminaire

- A l'aide d'une balance de précision, peser un bécher vide possédant une graduation 100 mL. Le peser de nouveau, après l'avoir rempli d'eau jusqu'à cette graduation, et en déduire la masse d'eau.
- Faire de même avec une éprouvette et une fiole jaugée.

Questions

1. Calculer, pour chacun des récipients, l'écart relatif entre la masse d'eau mesurée et la masse d'eau attendue.
2. Calculer la moyenne des écarts relatifs obtenus par la classe pour chaque récipient : en déduire lequel permet de mesurer des volumes avec la meilleure précision.

2 – Préparation de solutions par dissolution et par dilution

- Proposer un protocole pour préparer 100 mL d'une solution S_1 de sulfate de cuivre de concentration c_1 la plus proche possible de 0,100 0 mol.L^{-1}.
- Ecrire ensuite un protocole permettant de réaliser, par dilution à partir de S_1, une solution S_2 de concentration c_2 vingt fois plus faible.
- Réaliser ces deux solutions en suivant ces protocoles.

Questions

1. Calculer l'incertitude Δc_1 avec laquelle c_1 est connue sachant que

$$\frac{\Delta c_1}{c_1} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta V}{V}$$

où m est la masse de sulfate de cuivre pesée, M sa masse molaire et V le volume de la solution.

2. Calculer l'incertitude Δc_2 sur la concentration c_2 sachant que

$$\frac{\Delta c_2}{c_2} = \frac{\Delta c_1}{c_1} + \frac{\Delta V_1}{V_1} + \frac{\Delta V_2}{V_2}$$

où V_1 est le volume de solution mère prélevé et V_2 le volume de solution fille fabriqué.

3. Si S_2 avait été préparée par pesée, quelle masse de solide aurait-il fallu peser ? Calculer l'incertitude Δc_2 dans ce cas.
4. Commentez les deux modes de préparation de la solution S_2 au regard des incertitudes trouvées.