Mouvements dans un champ uniforme

Les lois de la mécanique énoncées dans le chapitre précédent permettent d'étudier n'importe quel mouvement. On s'intéresse ici au cas de mouvements dans les champs uniformes qui ont été étudiés en 1ère S : champ de pesanteur, champ électrostatique.

1 – Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur uniforme

1.1 – Lancer d'un projectile : cadre d'étude

Un projectile de masse m est lancé à un instant choisi comme origine des dates (t = 0 s) avec une vitesse $\vec{v}_o$ faisant un angle α par rapport à l'horizontale (c'est l'angle de tir).
L'étude du mouvement du projectile est réduite à celle de son centre d'inertie G ; par ailleurs,

- **Le champ de pesanteur est considéré uniforme (de valeur constante)**

De fait, l'expression de l'intensité du champ de pesanteur

$$g(z) = \frac{G.M_{Terre}}{\left(R_{Terre} + z\right)^2}$$

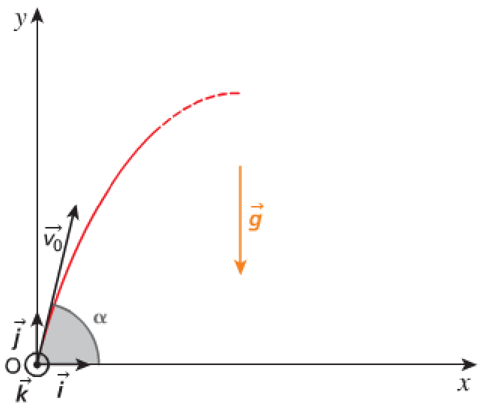
permet de vérifier que pour des altitudes restant inférieures au kilomètre, la variation de g reste très faible.

- **L'action de l'air (poussée d'Archimède, frottements) sur le projectile est négligée par rapport à l'effet de son poids.**

Ceci est d'autant plus acceptable que l'objet est dense, pénétrant dans l'air et de vitesse faible.

Le mouvement est étudié dans un référentiel terrestre supposé galiléen et muni d'un repère cartésien (*Oxyz*) ; le plan (*xOy*) est appelé plan de tir car il contient les vecteurs $\vec{v}_o$ et $\vec{g}$. Dans ce système d'axes, les coordonnées du vecteur vitesse initiale sont

$$\vec{v}_o \begin{cases} v_{ox} = v_o \cos\alpha \\ v_{oy} = v_o \sin\alpha \\ v_{oz} = 0 \end{cases}$$



1.2 – Résultante des forces et deuxième loi de Newton

Le projectile, en chute libre, ne subit que son poids $\vec{P} = m\vec{g}$; cette force est verticale, vers le bas et de valeur constante

$$P = m\ g$$

puisque la masse est constante et la pesanteur considérée uniforme.
La deuxième loi de Newton conduit à l'égalité

$$\vec{a} = \vec{g}$$

L'accélération, et donc le mouvement du projectile, ne dépendent pas de sa masse : deux projectiles de masses différentes en chute libre ont le même mouvement.

1.3 – Vecteur vitesse instantanée

L'égalité précédente s'écrit, dans le système d'axes choisi ici,

$$\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dv_x}{dt}(t) = 0 \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y}{dt}(t) = -g \\ a_z(t) = \dfrac{dv_z}{dt}(t) = 0 \end{cases}$$

Pour obtenir les trois coordonnées du vecteur vitesse, il suffit d'intégrer ces trois équations par rapport au temps. Il vient

$$\begin{cases} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = -g \times t + C_2 \\ v_z(t) = C_3 \end{cases}$$

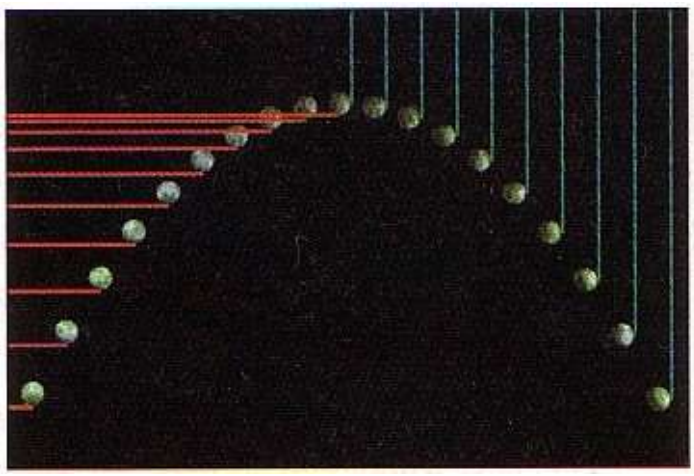
où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes d'intégration, que l'on déterminer par exemple à l'aide des conditions initiales,

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_o \begin{cases} v_x(0) = v_{ox} = v_o \cos\alpha = C_1 \\ v_y(0) = v_{oy} = v_o \sin\alpha = -g \times 0 + C_2 = C_2 \\ v_z(0) = v_{oz} = 0 = C_3 \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} v_x(t) = v_o \cos\alpha \\ v_y(t) = -g \times t + v_o \sin\alpha \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$

La vitesse horizontale est constante : le mouvement horizontal est uniforme.
Le mouvement vertical, lui, est uniformément accéléré car l'accélération verticale est constante.



<u>Exercice</u> : calculer la vitesse au sommet de la trajectoire pour un tir effectué à 30° à la vitesse initiale de 20 m.s^{-1}.
<u>Réponse</u> : 17 m.s^{-1}.

1.4 – <u>Vecteur position</u>

La vitesse étant la dérivée temporelle de la position, les coordonnées du vecteur vitesse instantanée vérifient le système d'équations différentielles suivant,

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt}(t) = v_o \cos\alpha \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt}(t) = -g \times t + v_o \sin\alpha \\ v_z(t) = \dfrac{dz}{dt}(t) = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}(t)$ s'obtiennent par intégration sur le temps,

$$\overrightarrow{OG}(t)\begin{cases} x(t) = \left(v_o \cos\alpha\right)\times t + C_4 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}g\times t^2 + \left(v_o \sin\alpha\right)\times t + C_5 \\ v_z(t) = C_6 \end{cases}$$

C_4, C_5 et C_6 sont des constantes d'intégration que l'on peut déterminer à l'aide des conditions initiales : si G est initialement à l'origine O, alors $C_4 = C_5 = C_6 = 0$ et

$$\overrightarrow{OG}(t)\begin{cases} x(t) = \left(v_o \cos\alpha\right)\times t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}g\times t^2 + \left(v_o \sin\alpha\right)\times t \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$

Le fait que z(t) = 0 corrobore bien le fait que le mouvement se déroule dans le plan de tir (xOy).

<u>Exercice</u>
A quelle date t_P l'objet retombe-t-il au sol ?

1.5 – <u>Equation cartésienne de la trajectoire</u>

L'équation horaire $x(t) = \left(v_o \cos\alpha\right)t$ permet d'exprimer le temps $t = \dfrac{x}{v_o \cos\alpha}$

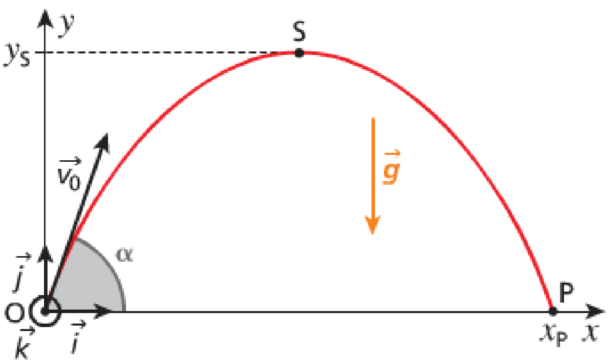
En plaçant cette expression dans la deuxième équation horaire, on change la variable,

$$y(t) \rightarrow y(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_o\cos\alpha}\right)^2 + v_o\sin\alpha\left(\frac{x}{v_o\cos\alpha}\right)$$

soit

$$y(x) = -\frac{g}{2{v_o}^2\cos^2\alpha}x^2 + \left(\tan\alpha\right)x$$

On retrouve une équation de trajectoire parabolique, dans le plan de tir, incurvée (ouverte) vers le bas.



1.6 – <u>Caractéristiques de la trajectoire</u>

<u>La flèche</u>
Au sommet de la trajectoire, la composante verticale de la vitesse s'annule : $v_y(t_S) = 0$.
D'après l'équation horaire de cette grandeur, le sommet est atteint à la date

$$t_S = \frac{v_o\sin\alpha}{g}$$

Si l'on insère cette date dans l'expression horaire de l'ordonnée, il vient

$$y_S = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_o\sin\alpha}{g}\right)^2 + v_o\sin\alpha\,\frac{v_o\sin\alpha}{g}$$

$$y_S = \frac{1}{2}\frac{{v_o}^2\sin^2\alpha}{g}$$

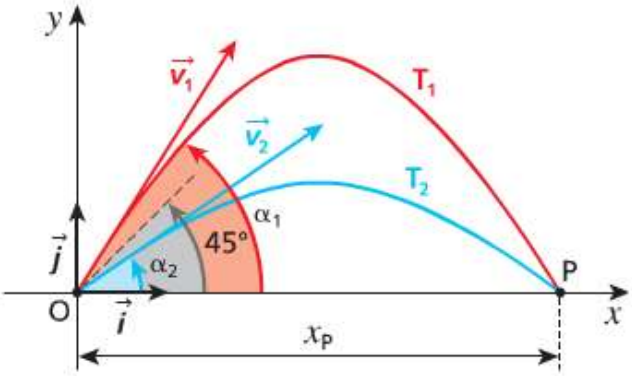
La portée

La portée est l'abscisse x_P du point P pour lequel l'altitude est nulle : c'est la distance totale au sol parcourue par l'objet.

On l'obtient à partir de l'équation cartésienne de la trajectoire,

$$y(x_P) = -\frac{g}{2v_o^2\cos^2\alpha}x_P^2 + (\tan\alpha)x_P = 0$$

$$y(x_P) = \left(-\frac{g}{2v_o^2\cos^2\alpha}x_P + (\tan\alpha)\right)x_P = 0$$



Cette équation admet deux racines

$x_P = 0$ (point de lancer)

$$x_P = \frac{2v_o^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g} = \frac{2v_o^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_o^2\sin 2\alpha}{g}$$

La portée croît avec v_o^2 ; elle est maximale, pour v_o donné, lorsque $\alpha = 45°$. Par ailleurs, deux angles de tir α_1 et α_2 complémentaires correspondent à la même portée.

Exercice : calculer la portée d'un projectile lancé à 30° à la vitesse initiale de 20 m.s^{-1}.
Réponse : 35 m – le tir est tendu, mais un tir en cloche avec un angle de 90 – 30 = 60° donne la même portée…

1.7 – Cas particulier : chute libre verticale

Lorsque la vitesse initiale est nulle ($v_o = 0$), le projectile est en chute libre verticale : seul l'axe (Oy) est utile vu que l'accélération est verticale. Dans ce cas,

$$v_y(t) = -gt$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

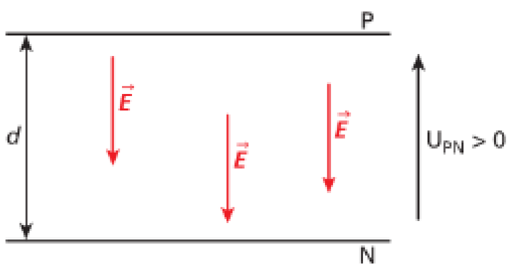
Le mouvement est rectiligne et uniformément accéléré.

Exercice : calculer la durée de chute d'un caillou lâché d'une hauteur h = 1,80 m.
Réponse : 0,61s – Remarquer que la masse du caillou n'importe pas !

2 – Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

2.1 – Champ et force

Un champ électrostatique $\vec{E}$ uniforme a même valeur, même direction et même sens en tout point de l'espace. Il peut être obtenu entre deux armatures métalliques planes P et N, séparées d'une distance d, entre lesquelles une tension U_{PN} est appliquée. Ce champ est orthogonal aux armatures, orienté de l'armature de plus haut potentiel vers l'armature de plus bas potentiel (sens des potentiels décroissants).



La valeur du champ électrostatique est alors

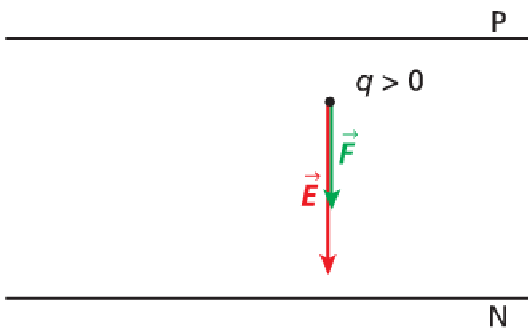
$$E = \frac{U_{PN}}{d}$$

et s'exprime en $V.m^{-1}$ si U_{PN} est en volts et d en mètres.
Une particule chargée de charge électrique q dans un champ électrostatique $\vec{E}$ subit une force électrique $\vec{F}$ telle que

$$\vec{F} = q \times \vec{E}$$

L'analogie formelle avec le champ de pesanteur est complète ($\vec{P} = m \times \vec{g}$). Toutefois, si la force gravitationnelle est toujours attractive, ce n'est pas le cas de la force électrostatique :

- Si q > 0, alors $\vec{F}$ est de même direction et de même sens que $\vec{E}$
- Si q < 0, alors $\vec{F}$ est de même direction que $\vec{E}$ mais de sens opposé.



<u>Exercice</u> : calculer la force électrique subie par un proton entre les armatures d'un condensateur de 10 cm sous 500 V.
<u>Réponse</u> : $8{,}0.10^{-16}$ N.

2.2 – <u>Accélération d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme</u>

Une particule chargée de masse m et de charge électrique q dans un champ électrostatique $\vec{E}$ se trouve également dans le champ de pesanteur. Elle subit donc deux forces,

- La forcé électrique $\vec{F} = q\vec{E}$
- Son poids $\vec{P} = m\vec{g}$

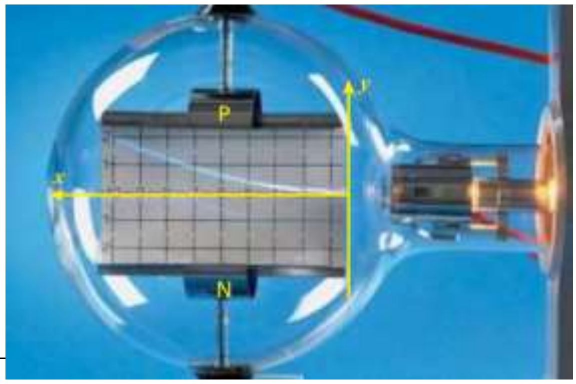
Les champs électrostatiques couramment utilisés ont des valeurs voisines de 10^4 $V.m^{-1}$. Si la particule étudiée est un électron, de charge électrique $-e = -1{,}6.10^{-19}$ C, la force électrique a une valeur proche de 10^{-15} N ; la masse de l'électron étant me = $9{,}1.10^{-31}$ kg, l'ordre de grandeur de la valeur du poids est de 10^{-29} N.
Ainsi, la force électrique subie par l'électron est 10^{14} fois plus grande que son poids, dont il est possible de négliger l'influence sur le mouvement. Ce sera, de fait, le cas quelle que soit la particule considérée.
Dans ce cadre, la deuxième loi de Newton donne

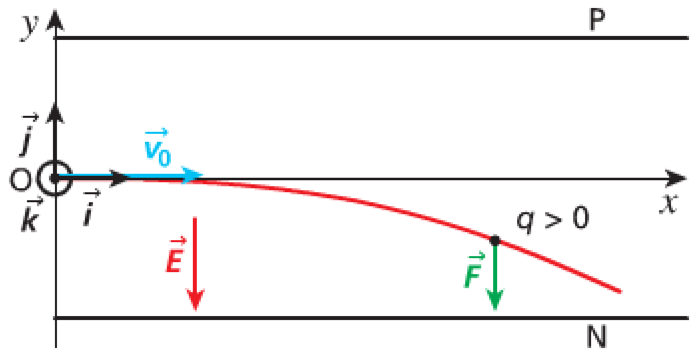
$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

L'accélération d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme est un vecteur constant, de même direction que la force électrique qu'elle subit.

2.3 – <u>Déviation d'une particule chargée</u>

Le dispositif ci-contre permet l'étude de la déviation d'un faisceau d'électrons pénétrant dans un champ électrostatique uniforme avec une vitesse initiale perpendiculaire au champ.
Lorsque U_{PN} est positive, les électrons sont déviés en direction de l'armature P.





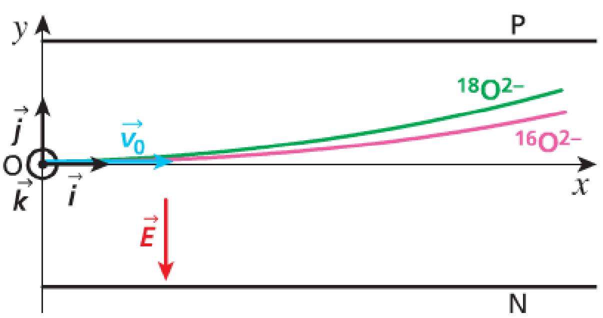
Le problème est formellement identique à celui du mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur terrestre : il suffit de remplacer g par $\frac{q}{m}E$ et d'introduire les conditions initiales adaptées ($\alpha = 0$) :

Vecteur vitesse de la particule $\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = v_o \\ v_y(t) = -\dfrac{qE}{m}t \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$

Vecteur position de la particule $\overrightarrow{OG}(t)\begin{cases} x(t) = v_o t \\ y(t) = -\dfrac{qE}{2m}t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$

La trajectoire de la particule est contenue dans le plan (xOy) ; son équation cartésienne est celle d'une parabole,

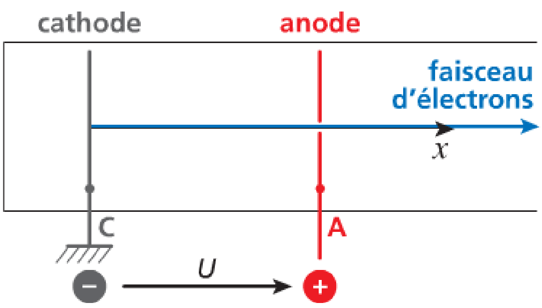
$$y = \frac{qE}{2mv_o^{\,2}}x^2$$



<u>Exercice</u> : déflexion d'ions monoatomiques
Un faisceau d'ions oxyde O^{2-} est envoyé en O dans un condensateur plan de longueur L = 10 cm où règne un champ électrique de 100 kV/m. La vitesse initiale de chaque ion est $v_o = 5{,}0.10^5$ m.s^{-1}.
Déterminer l'ordonnée de sortie des ions selon qu'ils appartiennent à l'isotope 16 ($m_{16} = 2{,}66.10^{-26}$ kg) ou à l'isotope 18 ($m_{18} = 2{,}99.10^{-26}$ kg) de l'oxygène.
<u>Réponses</u> : y_{16} = 2,4 cm ; y_{18} = 2,1 cm.

2.4 – <u>Le canon à électrons</u>

Ce problème est formellement identique à celui de la chute libre sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur uniforme : la valeur de l'accélération n'est pas g mais $\frac{e}{m}E$.



La vitesse de l'électron est $v_x(t) = \frac{eE}{m}t$ et sa position $x(t) = \frac{eE}{2m}t^2$.

La vitesse acquise par un électron accéléré par la tension U s'en déduit,

$$v_A = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

Elle ne dépend pas de la distance entre les électrodes.

En 1964, l'expérience de Bertozzi montre que des électrons accélérés sous la tension U = $5{,}0.10^5$ V acquièrent une vitesse $v_{exp} = 2{,}6.10^8$ m.s^{-1}, alors que l'expression ci-dessus conduit à la valeur v = $4{,}2.10^8$ m.s^{-1}

La théorie n'est donc pas confirmée par l'expérience : pour des vitesses supérieures au dixième de la célérité de la lumière dans le vide, les lois de la mécanique newtonienne ne sont plus valables ; il faut alors utiliser les lois de la mécanique relativiste…

Remarques sur la notion de champ

En physique, un **champ** est la donnée, pour chaque point de l'espace-temps, de la valeur d'une grandeur physique. Cette grandeur physique peut être scalaire (température, pression...) ou vectorielle (vitesse des particules d'un fluide, champ électrique...).

Un exemple de champ scalaire est donné par la carte des températures d'un bulletin météorologique télévisé : la température atmosphérique prend, en chaque point, une valeur particulière. La notion de champ est plus particulièrement adaptée à l'étude des milieux continus (mécanique des milieux continus, mécanique des fluides) ainsi qu'à celle des phénomènes électromagnétiques. Elle est indispensable à un traitement efficace des phénomènes ondulatoires.

Un champ gravitationnel est créé par tout objet matériel de masse M. En effet, cet objet est alors responsable d'une force d'interaction gravitationnelle pour tout corps de masse m à distance d d'après la loi de Newton,

$$\vec{F} = -G \times \frac{M \times m}{d^2}\overrightarrow{u_{mM}}$$

De façon équivalente, il est possible de décrire l'interaction en faisant intervenir le champ gravitationnel créé par l'objet de masse M,

$$\vec{F} = m \times \overrightarrow{g_M} \quad \text{où} \quad \overrightarrow{g_M} = -G \times \frac{M}{d^2}\overrightarrow{u_{mM}}$$

Ce champ gravitationnel est toujours dirigé vers l'objet qui le crée : la gravitation est une interaction attractive.

De la même façon, toute particule chargée de charge Q crée un champ électrostatique noté $\vec{E}$ que l'on peut faire apparaître dans l'expression de la force de Coulomb exercée par cette particule sur une autre de charge q distante de d,

$$\overrightarrow{F_{Q/q}} = K \times \frac{Q \times q}{d^2}\overrightarrow{u_{Qq}} = q \times \left(K \times \frac{Q}{d^2}\overrightarrow{u_{Qq}}\right) = q \times \vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = K \times \frac{Q}{d^2}\overrightarrow{u_{Qq}}$$

Ici, le champ électrostatique est sortant d'une charge + et entrant d'une charge –.

De même que le champ gravitationnel g est exprimé en N/kg, une analyse dimensionnelle montre que le champ électrostatique est exprimé en N/C, soit en V/m.

Dans le cas du condensateur plan, on retrouve le même formalisme, sans charges ponctuelles à proprement parler : le champ $\vec{E}$ est dirigé de la plaque + vers la plaque –.

De fait, le champ électrique traduit les variations du potentiel (état électrique) des points de l'espace où il règne. Son orientation « dans le sens des potentiels décroissants » peut se comprendre à l'aide de l'expression de la force de Coulomb

$$\vec{F} = q \times \vec{E}$$

Pour une charge positive (q > 0), se déplaçant naturellement vers les potentiels plus faibles (attirée par les points « plus négatifs »), la force est colinéaire au champ électrique et de même sens. Ceci ne se vérifie que si $\vec{E}$ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants – c'est-à-dire, grossièrement, du + vers le –.